

$\Phi(\rho) =$

**Физико·
Математическое
Наследие**



А. Гааз

**ВОЛНЫ
МАТЕРИИ
И КВАНТОВАЯ
МЕХАНИКА**



Физика

Квантовая механика



*Физико-математическое наследие: физика
(квантовая механика)*

Arthur Haas
MATERIEWELLEN
UND QUANTENMECHANIK

А. Гааз

ВОЛНЫ МАТЕРИИ И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Перевод с немецкого
П. С. Тартаковского

Издание четвертое



URSS
МОСКВА

Гааз Аргур

Волны материи и квантовая механика: Пер. с нем.

Изд. 4-е. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 168 с.

(Физико-математическое наследие: физика (квантовая механика).)

Внимание читателя предлагается книга австрийского физика-теоретика А. Гааза (1884–1941), представляющая собой небезуспешную попытку дать краткое изложение квантовой механики, не требующее больших математических познаний. В книге охвачены важнейшие идеи де Бройля, Гейзенберга, Шредингера и др., показана внутренняя связь этих идей и на важнейших примерах проиллюстрировано их значение.

Книга адресована физикам-теоретикам — исследователям, преподавателям, аспирантам и студентам, а также всем заинтересованным читателям.

Издательство «Книжный дом «ЛИБРОКОМ»».

117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 9.

Формат 60×90/16. Печ. л. 10,5. Зак. № 2973.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».

117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-397-01221-8

© Книжный дом «ЛИБРОКОМ»,
оформление, 2009

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА	
	E-mail: URSS@URSS.ru
	Каталог изданий в Интернете:
	http://URSS.ru
	Тел./факс: 7 (499) 135-42-16
	Тел./факс: 7 (499) 135-42-46

7988 ID 108157



ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА К ПЕРВОМУ, ВТОРОМУ И ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЯМ

Хотя со времени основания квантовой механики Гейзенберга и волновой механики Шредингера прошло немногим более двух лет, представляется вполне возможным посвятить этой самой молодой области физики учебник размером в тысячу страниц. Автор этой книги считал, однако, что для круга лиц, охватывающего не только физиков-специалистов, но и людей, только интересующихся физикой, существует потребность скорее в кратком изложении, не требующем больших математических познаний; такая книжка должна охватить лишь важнейшее из идей де-Бройля, Шредингера и Гейзенберга, показать внутреннюю связь этих идей и на важнейших примерах иллюстрировать все их значение. Настоящая книжка, содержащая лекции автора, читанные в зимнем семестре 1927/28 г. в Венском университете, представляет попытку подобного изложения.

Само собой разумеется, что такое намеренно краткое изложение должно заставить читателя, более серьезно заинтересовавшегося отдельными вопросами, обратиться к оригинальным работам; но кроме этого в элементарном изложении неизбежно должны быть опущены более тонкие детали, представляющие интерес скорее с математической, чем с физической точки зрения.

Хотя между первым и вторым изданиями этой книжки прошло всего около полугода, быстрее развитие квантовой и волновой механики заставило расширить содержание книжки введением четырех новых глав, посвященных действию света на атомы, квантовому резонансу, релятивистскому обобщению волнового уравнения и теории электрона по Дираку. Глава о принципе Паули совершенно переработана, а пятнадцатая глава первого издания вовсе опущена.

Третье издание отличается от второго появлением двух новых глав: об открытии параводорода и о волновой теории радиоактивности; кроме того, переработаны главы о дифракции волн материи и о теории электрона по Дираку.

Артур Гааз.

В е н

Февраль и октябрь 1928 г.

и ноябрь 1929 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Необходимость нового издания этой книжки всего через несколько месяцев после выхода первого издания свидетельствует о том, что и у русского читателя «Волны материи» имели такой же успех, как в Германии, Англии и Франции (в 1929 г. вышли французский и английский переводы).

В этом издании помещены главы о параводороде и квантовой теории радиоактивности, переведенные с третьего немецкого издания.

Весь текст тщательно сверен с новым немецким изданием и внесены все произведенные автором изменения.

29 ноября 1930 г.

И. Гармаковский.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
<i>Глава первая.</i> Задача механики атома	7
<i>Глава вторая.</i> Принцип Ферма, преобразование Лорента и понятие групповой скорости	14
<i>Глава третья.</i> Волновая механика де-Бройля	23
<i>Глава четвертая.</i> Связь между волновой механикой и теорией относительности	32
<i>Глава пятая.</i> Дифракция волн материи	37
<i>Глава шестая.</i> Теория Шредингера	41
<i>Глава седьмая.</i> Примеры из механики характеристических чисел	47
<i>Глава восьмая.</i> Квантовая механика Гейзенберга	55
<i>Глава девятая.</i> Матричная механика	68
<i>Глава десятая.</i> Связь между квантовой механикой Гейзенберга и теорией Шредингера	77
<i>Глава одиннадцатая.</i> Причинное и статистическое понимание физики атома	82
<i>Глава двенадцатая.</i> Принцип Паули	87
<i>Глава тринадцатая.</i> Квантовая статистика Бозе	92
<i>Глава четырнадцатая.</i> Статистика Ферми	101
<i>Глава пятнадцатая.</i> Действие на атомы световых волн и волн материи	107
<i>Глава шестнадцатая.</i> Резонанс в квантовой механике	116
<i>Глава семнадцатая.</i> Открытие параводорода	124
<i>Глава восемнадцатая.</i> Волновая теория радиоактивности	138
<i>Глава девятнадцатая.</i> Релятивистское обобщение основного уравнения волновой механики	145
<i>Глава двадцатая.</i> Теория электрона по Дираку	148
<i>Глава двадцать первая.</i> Квантовая механика и философия природы	154
Краткое изложение содержания	156
Наиболее употребительные обозначения	161
Именной указатель	162
Алфавитно-предметный указатель	163

(Примечание. Читатель, для которого вторая часть главы VIII и главы IX, X, XIX и XX окажутся слишком трудными, может пропустить эти главы).

Глава первая

ЗАДАЧА МЕХАНИКИ АТОМА

Со времени одного из старых периодов расцвета физики, именно со второй половины XVII в., сохранилось изречение великого исследователя Гюйгенса, в котором ярко отразилось не только научное направление того времени, но и последующих двухсот лет. «В настоящей науке, — говорил Гюйгенс, — можно понять причины всех явлений, только сводя их к представлениям механики, что и нужно делать, если только вообще не отказаться от надежды что-либо понять в физике»¹. Действительно, *механическое направление* было преобладающим в физике вплоть до второй половины XIX в. Оно начало ослабевать лишь после того, как все механические теории эфира оказались несостоятельными, и Максвелл создал новую теорию света на электромагнитной основе. Первые десятилетия XX в. принесли длинный ряд открытий в области *квантовых явлений*. Исследование их, непрерывно развиваясь, все сильнее и сильнее привлекало внимание физиков к вопросу о связи, существование которой следовало предполагать, между явлениями механическими, с одной стороны, и электрическими, магнитными и оптическими, с другой. Перефразируя Гюйгенса, современные физики могли бы сказать, что следовало бы отказаться от всякой надежды что-либо понять в физике, если бы оказалось невозможным свести механические явления к строю мыслей других отделов физики.

Громадный шаг вперед на пути к этой цели представляют возникшие с 1924 г. теории де-Бройля, Шредингера, Гейзенберга и Дирака; эта книжка представляет элементарное введение в эти теории.

¹ Huygens, *Traité de la lumière* (Leyden 1690), chap. la «Dans la vraie philosophie on conçoit la cause de tous les effets naturels par la raison de la mécanique, ce qu'il faut faire à mon avis ou bien renoncer à toute espérance de jamais rien comprendre dans la physique».

Механика — старейшая отрасль физики. К ней относились исследования истинного основателя теоретической физики Галилея. Ньютон, первый придавший физике форму стройной системы, покоящейся на математических основах, формулировал и основные законы механики. Еще через двести лет после Ньютона казалось, что ньютоново обоснование механики вполне удовлетворительно, так что хотя и можно дальше дополнять и совершенствовать формальные методы Ньютона, но существенно новых открытий, касающихся самого внутреннего содержания законов движения, сделать нельзя.

Поспешность этого заключения проявилась в начале XX в. На основе *теории относительности* возникла между 1905 и 1909 гг. новая механика. Эта последняя дала не только обобщение классических законов движения, в прежней форме оказавшихся лишь приближенными, но и сделала новое открытие исключительной важности. Именно, с одной стороны, обнаружилась удивительная связь между механикой и оптикой, так как *скорость световых волн оказалась верхней границей для всех механических скоростей*, с другой стороны, выяснилась тесная зависимость между механическим понятием *массы* и самым общим понятием всей физики — *энергией*. С точки зрения релятивистской механики оба эти основные понятия *тождественны*, так как масса какого-либо тела или материальной частицы отличается от запаса его энергии лишь множителем пропорциональности, который в свою очередь *совпадает с квадратом скорости света*.

Но не одна только теория относительности потрясла основы «классической механики». Эта последняя оказалась в противоречии с важнейшими результатами *теории квантов*, возникшей почти одновременно с теорией относительности и подобно ей касающейся не одной какой-либо области физики, но самых основ всей этой науки. Началом квантовой теории послужило открытие далеко идущего параллелизма между объектами механических, электрических и оптических явлений. Уже в последние десятилетия XIX в. стало ясным, что во всех явлениях движения участвуют в конечном счете два сорта *материальных частичек*, массы которых являются универсальными постоянными; все атомы построены из этих двух типов частичек. В настоящее время мы называем их *протонами* (большая масса) и *электронами* (меньшая масса). К концу XIX в. воз-

нило также и представление об *атомистической структуре электричества*. Физики обнаружили, что все электрические заряды—целые кратные элементарного заряда и что все элементарные частицы материи несут по одному элементарному заряду: более тяжелые частицы—протоны—несут положительный заряд, более легкие—электроны—отрицательный¹.

К открытию первичных материальных частичек и элементарного электрического заряда в начале XIX в. присоединилось еще новое, не менее важное открытие, именно, что свет (в широком смысле этого слова) также обладает атомистическим строением, т. е. что в известном смысле можно говорить об атомах света. Под словом «свет» мы понимаем не только видимый свет, но также инфракрасные тепловые лучи, электрические волны радиопередачи, ультрафиолетовые лучи, рентгеновы лучи, гамма-лучи радиоактивных веществ и т. п. Все эти, по видимому, столь различные типы излучений, как известно, совершенно тождественны по существу и различаются лишь *числами колебаний*. Например, для красного света число колебаний равно 400 миллиардам в секунду, для наиболее жестких рентгеновых лучей доходит до триллионов, а для лучей, применяемых для радиосвязи, равно несколькимстам тысяч.

Как показал Планк в 1900 г. (Эйнштейн в 1905 г. еще прочнее обосновал это положение), всякое излучение состоит из *элементов, энергия* которых отличается от частоты лишь множителем пропорциональности, являющимся *универсальной постоянной*. Энергию такого элемента излучения, выраженную в эргах, получим, если умножим число колебаний (в секунду) на число $6,55 \cdot 10^{-27}$. Это число имеет размерность энергии, деленной на число колебаний в секунду, т. е. размерность энергии, умноженной на время. В механике произведение энергии на время называется действием; поэтому множитель пропорциональности между энергией и частотой называется *элементарным квантом действия*. Элемент энергии, например желтого светового луча, равен $3,3 \cdot 10^{-12}$ эрга.

Длинный ряд экспериментальных исследований неопровержимо

¹ Масса протона равна $1,66 \cdot 10^{-24}$, масса электрона, в 1847 раз меньшая, равна $9,00 \cdot 10^{-28}$ г.

Элементарный электрический заряд равен $4,77 \cdot 10^{-10}$ электростатических единиц.

доказал, что атомы излучения, которые называют *квантами света*, а в самое последнее время *фотонами*, имеют столь же *индивидуальное существование*, как протоны или электроны.

Изучение так называемого *фотоэлектрического эффекта*, при котором освещением металла ультрафиолетовыми или рентгеновыми лучами из него вырывают электроны, показывает, что энергия *каждого отдельного фотона* превращается в кинетическую энергию *отдельного* электрона. Наоборот, при возбуждении рентгеновых лучей при помощи катодных лучей (т. е. при помощи быстрых электронов) каждый отдельный фотон возникает за счет уничтожения кинетической энергии одного электрона.

Из упомянутого выше тождества энергии и массы вытекает, что каждый фотон также обладает определенной массой, пропорциональной его частоте ¹. Величину этой массы в граммах получим, умножая число колебаний в секунду на $7,27 \cdot 10^{-48}$ (отношение элементарного кванта действия к квадрату скорости света). Для видимого света масса фотонов очень мала, в сравнении с массой электрона, она примерно в несколько сот тысяч раз меньше. Для фотонов же гамма-лучей масса приблизительно равна массе электрона. Что каждому фотону можно действительно приписать определенную массу, особенно ясно видно при *столкновениях между световыми квантами и электронами*. Артур Комптон открыл в 1923 г., что при этих столкновениях соблюдается не только закон сохранения энергии, но и закон сохранения количества движения, причем последнее выражается произведением массы на скорость не только у электронов, но также и у фотонов, движущихся со скоростью света.

Элементарный квант действия был введен в физику, как *оптическая константа* (именно та универсальная постоянная, которая определяет атомное строение света); но вскоре обнаружили, что и *чисто механические явления* внутри атома определяются элементарным квантом действия. Постоянная, бывшая раньше чисто оптической, стала играть роль *основной константы атомной механики* ². Необходимость создания

¹ Следует иметь в виду, что по смыслу теории относительности «покояющаяся» масса фотона должна быть равна нулю; ср. также уравнение (43) стр. 56.

² Автор этой книги, повидимому, первый обратил на это внимание в 1910 г., именно в применении к атому водорода (Sitz.-Ber. der Wiener

особой механики атома выяснилась после открытия, что все атомы состоят из положительного ядра, окруженного отрицательными электронами¹. Между ядром и окружающими его электронами должно действовать электрическое притяжение, и только допущением существования *центробежных сил* казалось возможным объяснить длительное существование такого атома. Поэтому пришлось предположить, что электроны *быстро движутся* вокруг ядра, подобно планетам в солнечной системе, с которой охотно сравнивали атом.

Простейшая задача атомной механики — это задача об *атоме водорода*, так как на основании многочисленных экспериментальных фактов принимают, что в нем имеется всего один электрон. Радиус орбиты электрона в такой модели атома сперва казался неопределенным. В 1913 г. Бор преодолел это затруднение при помощи гипотезы, оказавшейся исключительно плодотворной для всего дальнейшего развития физики атома.

Бор предположил, что момент количества движения электрона на его пути (т. е. произведение массы электрона на радиус орбиты и на скорость), умноженный на 2π , равен *элементарному кванту действия*. В соединении с фактом, что сила притяжения уравнивается центробежной силой, эта гипотеза привела к совершенно определенным значениям радиуса орбиты электрона и его скорости².

С другой стороны, спектроскопические исследования показывают, что атом каждого химического элемента испускает свет определенных, характерных для него частот, дающих в совокупности линейный спектр данного элемента. Линии появляются не только при испускании, но и в качестве линий поглощения; атом может либо испускать из себя фотоны определенных частот, либо вбирать их в себя. По закону сохранения энергии первый процесс должен быть связан с потерей атомной энергии, второй — с приобретением ее. Из пропорциональности

Akad. d. Wiss., math.-nat. Kl. Abt. IIa, 1910, S. 119—144). В этой статье также впервые указана связь так называемой постоянной Ридберга с зарядом и массой электрона и элементарным квантом действия.

¹ Основной экспериментальный материал, на котором основано представление о «ядерном» атоме (Резерфорд, 1911), относится к наблюдению прохождения α -частиц через металлические фольги.

² Для радиуса орбиты по Бору получается $5,3 \cdot 10^{-9}$ см, для скорости $2,188 \cdot 10^8$ см/сек; число оборотов равно $6,58 \cdot 10^{15}$ в секунду.

энергии фотона его частоте следует, что всякий атом может менять свою энергию лишь на строго определенные, характерные для данного элемента величины.

Действительно, наблюдения над столкновениями электронов с атомами¹ показали, что электроны могут отдавать атомам лишь строго определенные, точно измеримые количества энергии; другой вывод из этих опытов тот, что при определенных условиях отдача электроном энергии атому может вызвать испускание спектральной линии, частота которой в точности равна отданной электроном энергии, деленной на элементарный квант действия. Отсюда вытекает важное следствие, что атомы кроме своих основных состояний могут — по крайней мере временно — находиться в других состояниях с большей энергией; эти состояния должны соответствовать вполне определенным *уровням энергии*. Переходы между этими уровнями, характерными для каждого элемента, как раз и обуславливают испускание или поглощение определенных спектральных линий.

Бор пришел к правильному описанию наблюдаемого в действительности спектра водорода, сделав допущение, что в ненормальных состояниях атома водорода момент количества движения, умноженный на 2π , равен не самому элементарному кванту действия, но целым кратным от него. По Бору мы получим ряд атомных состояний, если заставим отношение умноженного на 2π момента количества движения к элементарному кванту действия пробегать *ряд целых чисел* (1, 2, 3 и т. д.). По существу метод Бора заключается в том, что сперва по принципам *классической механики* он находит совокупность всех возможных в атоме электронных орбит, а затем *выделяет* из них в качестве *допустимых с квантовой точки зрения* те, которые удовлетворяют приведенному выше *квантовому условию*.

Этот метод Бора, вскоре дополненный и расширенный Зоммерфельдом, оказался исключительно плодотворным для всего дальнейшего развития теоретической физики. При помощи этого метода в течение одного десятилетия удалось закончить замечательную теорию, которая давала возможность объяснить почти все известные *спектроскопические явления*. По мере роста

¹ Опыты со столкновениями электронов с атомами были начаты в 1913 г. Фрайком и Герцом.

числа задач физики атома физикам пришлось, однако, столкнуться с явлениями, в объяснении которых теория Бора оказалась бессильной. Так, например, механизм самого простого после водорода атома гелия уже оказалось невозможным описать в согласии с опытом.

Неудачи теории Бора заставили физиков снова обратить внимание на те основные затруднения, которые с самого начала содержались в этой теории, но со временем, в годы успехов ее, были забыты. Там, где теория начала терпеть неудачи, эти затруднения опять стали острее чувствоваться. Выделение «квантовых» орбит с точки зрения классической механики, совершенно непонятно, точно так же как и определение механических путей при помощи основной оптической постоянной.

Выйти из кризиса, к которому пришла теория атома около 1923 г., можно было надеяться только лишь путем нового обобщения механики; при помощи третьего обоснования механики (если можно так выразиться), которая в новой своей форме должна заключать в себе в качестве частных случаев не только первую механику, галилеевскую, но и вторую механику — Эйнштейна.

Механика Эйнштейна привела к новым выводам в области колоссально больших скоростей, тогда как в области обычных скоростей оставалась справедливой «классическая» механика. Подобно этому от третьей механики нужно было требовать, чтобы она приводила к новым результатам в применении к областям *атомных размеров*, тогда как в макроскопических областях она должна давать результаты, совпадающие с выводами классической механики. Таким образом можно было надеяться, что новая механика сама собой даст те *квантовые условия атомных явлений*, которые до сих пор казались столь таинственными; они не должны быть далее навязываемы классической механике, как чуждые ей дополнения, лишенные всякой внутренней связи; наконец, для новой механики должны отпасть те затруднения, которые существовали для старой квантовой теории в том что некоторые из ее необходимых следствий были в противоречии с опытными фактами.

ПРИНЦИП ФЕРМА, ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОРЕНЦА И ПОНЯТИЕ ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ

Как в механике, так и в оптике уже с давних времен было стремление найти некоторый *высший принцип*, выражающий то свойство какой-нибудь механической или оптической величины, что она имеет максимум или минимум; таким образом думали получить основные законы соответствующей области в особенно простой форме. В оптике такой принцип был найден в XVII в. — это *принцип кратчайшего времени пробега света*, установленный Ферма. По этому принципу луч света, выходящий из заданной точки A и попадающий в заданную точку B , затрачивает на пробег по своему *действительному* пути время более короткое, чем то, которое понадобилось бы свету для прохождения от A до B по любому другому пути¹. Из принципа Ферма можно всегда правильно определить форму пути света; например, очень легко выводится *закон преломления*.

Рассмотрим две среды, волновые скорости в которых соответственно равны u_1 и u_2 ; через s_1 и s_2 обозначим длины путей, которые луч проходит в обеих средах, идя от A к B . Тогда для истинного пути сумма $\left(\frac{s_1}{u_1} + \frac{s_2}{u_2}\right)$, представляющая время прохождения, должна иметь минимум. Для *неоднородной* среды, в которой скорость, вообще говоря, меняется от точки к точке, мы должны разложить путь на бесконечно малые элементы и каждый из них разделить на соответствующее значение скорости; сумма этих отношений и даст время пробега света в неоднородной среде. Мы получим при этом, как говорят математики, *интеграл обратного значения волновой ско-*

¹ Принцип Ферма является распространением очень похожего принципа, установленного еще в древности Героном Александрийским для частного случая отражения. В этом случае длина пути света должна быть кратчайшей, так как при отражении скорость света всюду одинакова, и кратчайший путь совпадает с кратчайшим временем.

рости, взятый по пути AB ; таким образом, если пользоваться обычными математическими символами, получается соотношение:

$$\int_A^B \frac{ds}{u} = \text{минимуму (где } u \text{ — волновая скорость)}. \quad (1)$$

Это соотношение, выражающее в самой общей форме принцип Ферма, оказывается в удивительной связи с формулой, которая в середине XVII в. была установлена в качестве высшего начала механики. Впервые она была дана Мопертюи, но вполне точную формулировку дал несколько позже Эйлер. По этому принципу для действительного движения материальной точки от A к B интеграл механической скорости v , взятый по пути AB , должен иметь минимум¹. Имеет место соотношение:

$$\int v ds = \text{минимуму (где } v \text{ — механическая скорость)}. \quad (2)$$

Из этой формулы можно получить основные уравнения механики и непосредственно из нее можно определить путь тела; например, в частном случае тела, движущегося под действием тяжести, из нее получается параболический путь.

В теореме Мопертюи механическая скорость играет ту же роль, что обратная величина волновой скорости в теореме Ферма. При некоторых допущениях принцип Ферма можно считать общим принципом, справедливым для всех видов волн. Сравнение формул (1) и (2) дает возможность объяснить механические закономерности на почве теории волн. В самом деле, высший механический принцип получается как необходимое следствие из допущения, что механические явления основаны на каких-то волновых процессах, причем существует пропорциональность между механической скоростью и обратной величиной волновой скорости; коэффициент пропорциональности — универсальная постоянная. Для пояснения этой связи мы вкратце остановимся на элементарном рассмотрении общей волновой формулы.

¹ Более общим и правильным с точки зрения теории относительности является требование минимума для интеграла количества движения.

Если мы будем рассматривать определенную точку внутри волнового поля, то всякий волновой процесс можно представить в виде *колебания*; последнее в простейшей форме можно представить уравнением:

$$S = A \sin (2\pi\nu t), \quad (3)$$

где S — колеблющаяся величина¹, A — амплитуда колебания, ν — частота его и t — время. Действительно, величина S , представляемая уравнением (3), принимает прежнее значение всякий раз, когда время нарастает на величину $\frac{1}{\nu}$ ². Если написать уравнение (3) в форме:

$$S = A \sin \varphi, \quad (4)$$

то величина φ называется фазой колебания. Она имеет простую форму, как и уравнение (3), только тогда, когда начало отсчета времени выбрано так, что в этот момент $S = 0$. Это, однако, невозможно в общем случае, когда нужно рассматривать одновременно несколько колебаний; в этом случае в выражении фазы приходится прибавить *фазовую постоянную*.

С периодичностью во времени, характеризующей всякий колебательный процесс, во всякой волне еще комбинируется *периодичность в пространстве*.

Распространение волны в некотором направлении, которое мы можем выбрать за ось x , заключается в том, что на некотором расстоянии x_1 от начальной точки ($x = 0$) имеется всегда *то же состояние*, что было в начальной точке на промежуток времени t_1 раньше; при этом произведение t_1 на волновую скорость u равно расстоянию x_1 . Мы видим, что $t_1 = \frac{x_1}{u}$; мы получим состояние колебания в любой точке x и в любое

¹ Колеблющаяся величина может быть расстоянием или углом (например у маятника), но также плотностью, напряжением электрического или магнитного поля, температурой и т. п. Колебательное движение относительно положения равновесия (например маятника) является наиболее наглядной иллюстрацией для колебательного процесса; однако совершенно неправильно представлять себе всякий колебательный физический процесс, заключающийся в периодическом изменении какой-либо величины, как механическое колебание.

² Так как $\sin \left[2\pi\nu \left(t + \frac{1}{\nu} \right) \right] = \sin (2\pi\nu t + 2\pi) = \sin (2\pi\nu t)$.

время t , если в уравнении (3) заменим величину t выражением $(t - \frac{x}{u})$. Таким образом получается волновая формула:

$$S = A \sin \left[2\pi \nu \left(t - \frac{x}{u} \right) \right]. \quad (5)$$

Фаза определяется, следовательно, выражением в квадратных скобках, к которому в общем случае нужно еще прибавить фазовую постоянную ε . Кроме того, в общем случае вместо прямолинейного расстояния x от начальной точки нужно подставить длину s луча, отсчитываемую от начальной точки. Поэтому для фазы получается выражение:

$$\varphi = 2\pi \nu \left(t - \frac{s}{u} \right) + \varepsilon. \quad (6)$$

Оказывается, что между волновой формулой и одной из основных формул теории относительности (так называемое *преобразование Лорентца*) имеется удивительная связь, на которую до последнего времени не обращали внимания. Теория относительности Эйнштейна основана, как известно, на допущении, что все отсчеты *относительны*; что они зависят от «точки зрения» описывающего явление наблюдателя и поэтому для двух движущихся друг относительно друга наблюдателей отсчеты времени *различны*. С другой стороны, теория относительности постулирует такое соотношение между определением времени и места обоими наблюдателями, что для каждого из них *во всех направлениях* свет представляется распространяющимся одинаково и с одной и той же скоростью¹.

Для частного случая прямолинейного и равномерного движения это соотношение выражается так называемым преобразованием Лорентца. Если один из наблюдателей движется относительно другого со скоростью v в направлении обеих осей x (для координатных систем обоих наблюдателей), то простран-

¹ Это следует из опытного факта, что движение Земли в пространстве не оказывает никакого влияния на распространение света на ней.

ственные координаты и отсчеты времени связаны между собой соотношениями ¹:

$$x' = \beta(x - vt); \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right). \quad (7)$$

При этом c обозначает скорость света, а β — сокращенное выражение для

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (8)$$

Для волновой формулы особый интерес представляет в уравнениях (7) соотношение между относительными отсчетами времени.

Если механической скорости v сопоставить некоторую другую w при помощи соотношения ² w

$$wv = c^2, \quad (9)$$

то четвертое из уравнений (7) можно переписать в форме

$$t' = \beta\left(t - \frac{x}{w}\right); \quad (10)$$

из этой формулы сразу видна тесная связь с волновой формулой.

Для выяснения значения последней формулы рассмотрим какой-нибудь *колебательный процесс*, который каким-то образом связан с *движущимся телом*. Скорость по отношению к некоторой координатной системе пусть будет v . Назовем эту координатную систему «системой без штрихов» (x, y, z, t) и вообразим себе «систему со штрихами» (x', y', z', t'), в кото-

¹ В самом деле, при подстановке значений из уравнения (7) выражение $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$ тождественно переходит в $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$, с другой стороны, уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$$

описывает одинаковое во всех направлениях распространение света со скоростью c .

² Скорость света есть средняя пропорциональная скоростей w и v .

рой тело *покоится*. Следовательно, система со штрихами также движется по отношению к системе без штрихов со скоростью v в направлении оси x . По отношению к штрихованной системе колебательный процесс во всяком случае можно описать формулой:

$$S = A \sin(2\pi\nu t').$$

Применяя уравнение (10) и для упрощения полагая

$$\beta\nu' = \nu, \quad (11)$$

можем согласно преобразованию Лорентца написать:

$$S = A \sin \left[2\pi\nu \left(t - \frac{x}{u} \right) \right].$$

На основании этого уравнения всякий колебательный процесс, связанный с *подвижным* телом, можно рассматривать как волну, скорость распространения которой обратно пропорциональна механической скорости тела:

$$u = \frac{c^2}{v}.$$

Согласно одному из основных положений теории относительности, механическая скорость никогда не может быть больше скорости света и никогда ее не достигает. Распространение рассмотренных нами волн должно поэтому всегда происходить со скоростью, *большой скорости света*. Такое представление кажется, на первый взгляд, связанным с большими затруднениями, так как скорости движущихся тел оказываются совершенно отличными от скоростей распространения тех волн, которые нужно себе представлять связанными с этими телами. Для быстрого автомобиля, скорость которого примерно составляет $1/10000000$ скорости света, волны примерно в 100 миллионов раз скорее, чем сам автомобиль, а для пешехода это расхождение еще больше. Кажущееся противоречие можно, однако, разъяснить удовлетворительным образом при помощи соображений, известных в теоретической физике уже много десятков лет; они относятся как к оптике, так и к гидро-

динамике и приводят к важному понятию *групповой скорости*.

Под *группой волн* понимают совокупность таких волн, числа колебаний которых не совсем одинаковы и заполняют некоторый промежуток значений. Поведение такой группы волн делается понятным, если иметь в виду, что среднее значение синуса всевозможных углов (если принимать во внимание и знак) равно нулю, потому что каждому положительному значению синуса соответствует равное по абсолютной величине отрицательное значение, и они взаимно уничтожаются. Если мы будем рассматривать совокупность колебаний, *фазы* которых не вполне совпадают, то в общем случае *результатирующее колебание* (сумма произведений амплитуд на синусы соответственных фаз) окажется очень *малым* по сравнению с алгебраической суммой амплитуд. Рассмотрим внутри группы такое место, где фазы отдельных волн, составляющих группу, *почти* совпадают; в этом месте результирующее колебание относительно велико. Такое место, в котором плотность энергии по сравнению с окружающим пространством имеет максимум, мы будем называть *центром энергии группы волн*. Можно определить его при помощи требования, чтобы для двух волн с бесконечно мало отличающимися частотами разность фаз была бесконечно малой второго порядка; иначе говоря, для центра энергии частная производная от фазы по частоте исчезает:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0. \quad (12)$$

Приняв для φ значение из уравнения (6) и применяя правила дифференциального исчисления, найдем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 2\pi t - 2\pi s \frac{d\left(\frac{\nu}{u}\right)}{d\nu} + \frac{ds}{d\nu}.$$

На основании уравнения (12) получается:

$$= s \frac{1}{\frac{d\left(\frac{\nu}{u}\right)}{d\nu}} \left(t + \frac{1}{2\pi} \frac{ds}{d\nu} \right).$$

Величина g зависит, следовательно, от времени, т. е. центр энергии сам *перемещается* со скоростью, равной той величине, на которую умножено выражение в скобках в последнем уравнении. Действительно, обозначив эту величину через g , мы увидим, что производная пути по времени, определенная из этого уравнения, равна g . Величина g представляет, таким образом, ту скорость, с которой перемещается центр энергии, с которой распространяется *энергия волн*. Эта величина называется *групповой скоростью* волн, и, поскольку волновая скорость зависит от частоты (т. е. имеется «дисперсия»), групповую скорость надо отличать от волновой. Из последнего уравнения для групповой скорости следует выражение, впервые полученное Рэлеем ¹:

$$\frac{1}{g} = \frac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{dv}. \quad (13)$$

Это уравнение мы применим теперь к частному случаю волн, распространяющихся со скоростью, большей скорости света, которые рассматривали выше. Закон дисперсии этих волн заключается в уравнении (11), принимая в расчет уравнение (8). Обозначив теперь в уравнении (11) частоту ν , не зависящую от скорости, через ν_0 , получим ²:

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (14)$$

По уравнению (9) для рассматриваемых волн:

$$\frac{v}{u} = \frac{v_0}{c^2}$$

¹ Производя дифференцирование в уравнении (13), получим:

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{u} - \frac{v}{u^2} \frac{du}{dv}.$$

Отсюда видно, что при отсутствии дисперсии (но только в этом случае) групповая скорость совпадает с волновой.

² ν_0 обозначает частоту по отношению к координатной системе, движущейся вместе с телом.

и, следовательно,

$$\frac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{dv} = \frac{v}{c^2} + \frac{v}{c} \frac{dv}{dv}.$$

Уравнение же (14) дает:

$$\frac{dv}{dv} = \frac{v_0 v}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{v v_0}{c^2 - v^2}.$$

Отсюда

$$\frac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{dv} = \frac{v}{c^2} + \frac{c^2 - v^2}{c^2 v} = \frac{1}{v}.$$

Принимая во внимание уравнение (13), получим важный результат:

$$g = v. \quad (15)$$

Таким образом если мы представим себе, что с движущейся частицей материи связан колебательный процесс, то на основании преобразования Лорентца этот процесс нужно понимать как волну, распространяющуюся со скоростью, большей скорости света; при этом *групповая скорость* этих волн совпадает с *механической скоростью* частицы.

Глава третья

ВОЛНОВАЯ МЕХАНИКА ДЕ-БРОЙЛЯ

Соотношения предыдущей главы являются непосредственными следствиями механики и оптики прежних столетий, общих соображений волновой теории и теории относительности. Громадной заслугой Луи де-Бройля является то, что он в 1924 г. обратил внимание на всю важность этих соотношений, на которые раньше почти не обращали внимания; таким образом он явился создателем новой теории, которая оказала величайшее влияние на все дальнейшее развитие физики. Де-Бройль сделал *основное предположение, что каждой частице материи нужно сопоставить некий колебательный процесс* так, чтобы элемент энергии этого колебания (т. е. произведение частоты на элементарный квант действия) равнялся энергии самой частицы, т. е. (по теории относительности) произведению массы частицы на квадрат скорости света.

Согласно сказанному в предыдущей главе каждая движущаяся частица материи связана с волной, распространяющейся со скоростью, большей скорости света, причем групповая скорость волны представляет механическую скорость частицы. Законы движения этой последней и их выражение в принципе Мопертюа можно не считать более самостоятельными аксиомами, так как в результате представлений де-Бройля они являются необходимым следствием общего волнового принципа. Сама материя представляется «разрешенной в волны», центры энергии которых представляют протоны и электроны. Поэтому теорию, основанную де-Бройлем, называют волновой механикой, а волны, распространяющиеся со «сверхсветовой» скоростью, — волнами материи.

Согласно только что сказанному основным уравнением волновой механики является соотношение:

$$h\nu = mc^2, \quad (16)$$

где m — масса частицы материи и h — элементарный квант действия. Полагая m равным массе электрона, получим связанную с ним частоту равной $1,24 \cdot 10^{10}$ (в секунду); в случае протона, с массой в 1847 раз большей, находим $2,29 \cdot 10^{10}$. Частота пропорциональна массе, а так как последняя изменяется со скоростью лишь незначительно, то и частота изменяется только в очень узкой области значений, если, конечно, не иметь дела со скоростями порядка скорости света. Как у всяких волн, так и у волн материи, длина волны связана с частотой тем, что произведение этих величин равно скорости распространения; следовательно,

$$u = \lambda \nu \quad (17)$$

или по уравнению (9)

$$\lambda = \frac{c^2}{v\nu}.$$

Отсюда по уравнению (16) следует, что

$$\lambda = \frac{h}{mv}. \quad (18)$$

Для электрона длину волны в сантиметрах найдем, деля число 7,28 на скорость электрона (см в секунду). Для скорости, составляющей от 20 до 40%, скорости света (как это имеет место у катодных лучей), λ оказывается порядка 10^{-9} см; в случае относительно медленных электронов, испускаемых накаливаемыми проволоками, длина волны порядка 10^{-7} см, т. е. того же порядка величины, что и длины волн рентгеновых лучей. Так как произведение массы на механическую скорость представляет количество движения или импульс (G), то уравнение (18) можно переписать в форме:

$$G = \frac{h}{\lambda} \quad (19)$$

или по уравнению (17):

$$G = \frac{h\nu}{u}. \quad (20)$$

Рассмотрим периодическое движение по замкнутой орбите.

Пусть dr элемент пути; тогда для заданного момента времени по уравнению (6) разность фаз на концах элемента пути

$$d\varphi = -2\pi\nu \frac{dr}{u}.$$

Если A и B —две точки замкнутой орбиты и в определенный момент фазы в точке A равна φ_1 , то для фазы в точке B получим:

$$\varphi_2 = \varphi_1 - 2\pi \int_A^B \frac{\nu dr}{u}.$$

Если часть пути между A и B заставлять постепенно увеличиваться, то в конце концов вследствие замкнутости орбиты точка B совпадет с точкой A . Но в точке A колеблющаяся величина может иметь только *одно* определенное значение и поэтому, если B совпадает с A , должно быть:

$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1.$$

Это возможно, вообще говоря, только при условии

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2n\pi,$$

где n — целое число. Если обозначить интеграл, взятый по замкнутому пути, обычным знаком \oint , то должно быть:

$$\oint \frac{\nu dr}{u} = n \quad (21)$$

или по уравнению (20)

$$\oint G dr = nh. \quad (22)$$

Последние два уравнения принимают особенно простую форму в частном случае *постоянной скорости*. В этом случае, имеющем место при *равномерном круговом движении*, волновая скорость и частота (вследствие постоянства массы) постоянны и, пользуясь уравнением (17), мы можем переписать уравнение (21) в форме:

$$\oint dr = n\lambda, \quad (23)$$

т. е. при постоянстве скорости возможны лишь *такие замкнутые орбиты, для которых длина пути представляет целое кратное длины волны*. Другое выражение для этой закономерности можно получить из уравнения (22). При постоянстве массы и скорости оно принимает вид:

$$2\pi rG = nh,$$

где r — радиус круга. Для момента количества движения U , представляющего произведение количества движения на радиус орбиты, получим соотношение:

$$2\pi U = nh. \quad (24)$$

По этому уравнению, являющемуся лишь другим выражением уравнения (23), возможны только такие круговые орбиты, для которых умноженный на 2π момент количества движения равен *целому кратному элементарного кванта действия*. Это положение представляет не что иное, как основное *правило квантования*, при помощи которого Бор в 1913 г. объяснил спектр водорода. Это правило является необходимым следствием представления о волнах материи; то же относится и в общему уравнению (22), из которого получаются обычные правила квантования для более общих задач ¹.

Как показал Эйнштейн, необходимым следствием теории де-Бройля является также *квантование энергии поступательного движения* газа, заключенного в замкнутом сосуде. Это следствие, имеющее столь важное значение для кинетической теории газов, а следовательно, и для термодинамики, вытекает из общих соображений, высказанных еще в 1900 г. Рэлеем и в 1905 г. более точно обоснованных Джинсом; дело идет о так называемых *собственных колебаниях* в замкнутом объеме, который мы далее, ради простоты, будем считать *кубом*. Известно, что вдоль натянутой струны возможны стоячие волны лишь такой длины, которая удовлетворяет уравнению

$$l = n \frac{\lambda}{2},$$

¹ См. Einstein, «Verh. d. Deutsch. Phys. Ges.», 19, 82, 1917.

где n представляет целое число «подразделений». В случае куба место узловых точек занимают *узловые плоскости*, параллельные граням куба.

Представим себе координатную систему, начало которой совпадает с одной из вершин куба, а оси с тремя ребрами, исходящими из этой вершины. Числа подразделений в направлениях x, y, z пусть будут n_1, n_2, n_3 . Пусть RS какая-либо прямая (рис. 1), параллельная оси x , которая в точках A, B, C пересекается соседними узловыми плоскостями, параллельными плоскости yz . Если a обозначает ребро куба, то расстояния между этими плоскостями равны $\frac{a}{n}$. Пусть, далее, TU — произвольный луч, образующий с координатными осями углы α, β, γ . Через точки A, B, C проведем перпендикулярные к лучу TU волновые плоскости, между которыми, конечно, существует разность фаз в полпериода, так как такая разность фаз имеет место для точек A, B, C , лежащих в рассматриваемых узловых плоскостях. Таким образом

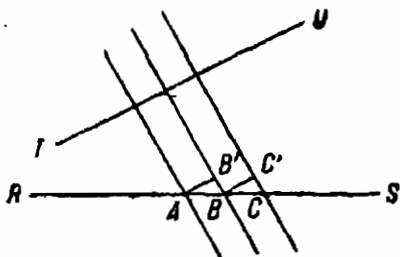


Рис 1.

$$AB' = BC' = \frac{\lambda}{2}.$$

С другой стороны,

$$AB' = AB \cos \alpha = \frac{a}{n_1} \cos \alpha.$$

Принимая во внимание аналогичные соотношения для осей y и z , получим три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2a}{\lambda} \cos \alpha &= n_1, \\ \frac{2a}{\lambda} \cos \beta &= n_2, \\ \frac{2a}{\lambda} \cos \gamma &= n_3. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Возвышая в квадрат и складывая, получим:

$$\frac{2a}{\lambda} = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}. \quad (26)$$

Поэтому уравнения (25) можно переписать в форме:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \pm \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}, \\ \cos \beta &= \pm \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}, \\ \cos \gamma &= \pm \frac{n_3}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

(Для луча TU возможен путь, симметричный по отношению к направлению RS .) Таким образом мы видим, что каждой совокупности трех чисел n_1, n_2, n_3 соответствует собственное колебание вполне определенной длины волны и направления

Наоборот, возможными являются только такие колебания, для которых величины $\lambda, \alpha, \beta, \gamma$ удовлетворяют уравнениям (26) и (27) с целыми значениями n_1, n_2, n_3 .

Простое геометрическое построение позволяет сделать из этого результата важный вывод. Представим себе прямоугольную координатную систему, состоящую лишь из положительных полуосей, т. е. вырезающую из всего пространства лишь один октант (восьмую часть). На рис. 2 дана эта схема

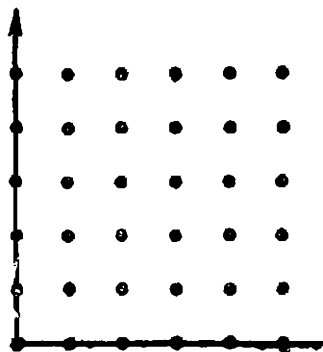


Рис. 2.

для плоского случая. Ее нужно представлять себе в виде пространственной точечной решетки с единицей длины в качестве постоянной решетки. Тогда координаты всех точек решетки будут выражаться целыми числами; наоборот, то колебание, которое по уравнениям (26) и (27) задается совокупностью определенных трех целых чисел, может быть представлено той точкой решетки, координаты которой выражаются как раз этими тремя числами. Расстояние данной точки решетки от начала

координат

$$r = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

и по уравнению (26):

$$r = \frac{2a}{\lambda},$$

или

$$r = 2a\epsilon, \quad (28)$$

где ϵ — так называемое *волновое число*, которое показывает, сколько длин волн укладывается в единице длины.

Это построение приводит непосредственно к решению вопроса о *числе собственных колебаний*, заключающихся в интервале волновых чисел от ϵ до $\epsilon + \Delta\epsilon$. Назовем это число ΔZ . Оно равно *числу точек решетки*, заключающихся между поверхностями шаров с радиусами $2a\epsilon$ и $2a(\epsilon + \Delta\epsilon)$. В среднем на единицу объема приходится одна точка (так как расстояние между двумя соседними точками равно единице длины). Поэтому ΔZ просто равно $\frac{1}{8}$ объема слоя, заключенного между названными двумя сферическими поверхностями, т. е.

$$\frac{1}{8} \cdot 4\pi r_2^3 - \frac{1}{8} \cdot 4\pi r_1^3,$$

где $r_1 = 2a\epsilon$, $r_2 = 2a(\epsilon + \Delta\epsilon)$.

Обозначая объем куба через V , получим:

$$\Delta Z = 4\pi V \epsilon^2 \Delta\epsilon. \quad (29)$$

Эта формула, выведенная нами для самого простого случая куба, на самом деле совершенно не *зависит от формы пространства*. Как уже было сказано, она выведена впервые Рэлеем и более точно Джинсом.

Мы применим теперь формулу Рэлей-Джинса, которой удовлетворяют как электромагнитные волны, так и упругие (следовательно, звук), к *волнам материи* газа, заключенного в рассматриваемое пространство. По уравнению (19) волновое число равно отношению количества движения частицы к элементарному кванту действия. Поэтому число ΔZ представ-

лет число возможных значений количества движения G в промежутке $G, G + \Delta G$ (мы заменяем x через $\frac{G}{h}$). Отсюда

$$\Delta Z = \frac{4\pi V}{h^3} G^2 \Delta G. \quad (30)$$

Заменяя G произведением из массы молекулы m на скорость ее v , можно считать ΔZ числом значений скорости в интервале $v, v + \Delta v$. Мы получаем:

$$\Delta Z = \frac{4\pi V m^3}{h^3} v^2 \Delta v. \quad (31)$$

Рассматривая, например, гелий при комнатной температуре, мы положим m/h приблизительно 1000, а v примерно 10^5 . Для объема в 1 см^3 и интервала скоростей в 1 см/сек получится по уравнению (31) число порядка 10^{20} . Для куба же с ребром 10^{-8} см получим число порядка 100. Так же как периодические движения по заменутым орбитам, *поступательные* движения молекул газа в резервуаре оказываются *квантованными*. Действительно, представление о квантовании молекулярных состояний предложено Планком¹ в 1916 г. и применено им с успехом к различным термодинамическим расчетам (например, при вычислении так называемой химической постоянной газов). Эта гипотеза, казавшаяся ранее столь непонятной, является необходимым следствием представления о волнах материи.

Уравнению (31) можно придать наглядное значение. Для этого сопоставим газу некое «пространство импульсов» таким образом, чтобы в нем каждая молекула была представлена точкой с координатами, равными слагающим (mv_x, mv_y, mv_z) количества движения молекулы. Расстояние такой точки от начала координат представляет величину количества движения (т. е. mv). Провождая в пространстве импульсов две концентрические сферы вокруг начала координат с радиусами mv и $m(v + \Delta v)$, найдем, что часть пространства между этими сферами (объема $4\pi m^3 v^2 \Delta v$) заключает все точки со значениями количества дви-

¹ M. Planck, Sitz.-Ber. d. Akad. d. Wiss. Berlin 1916, S. 653.

жения между mv и $m(v + \Delta v)$. В этом слое по уравнению (31) на единицу объема приходится:

$$S = \frac{V}{h^3} \quad (32)$$

точек. Наоборот, можно себе представить все пространство импульсов разделенным на ячейки величины

$$\sigma = \frac{h^3}{V}$$

таким образом, что каждой ячейке уже не имеет смысла различать отдельные значения количества движения. Таким образом в каждой клетке возможно лишь одно значение количества движения, а следовательно, и скорости. Эти числа, определяющие прерывность, тем больше, чем меньше объем, в котором заключен газ.

Глава четвертая

**СВЯЗЬ МЕЖДУ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКОЙ И ТЕОРИЕЙ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

То обстоятельство, что при установлении своей теории де-Бройль исходил из преобразования Лорентца, указывает на тесную связь между *волновой механикой и теорией относительности*. Можно высказать предположение, что и основные законы релятивистской механики могут быть выведены из *классической механики и геометрического учения о волнах* при помощи представления о *волнах материи*. Автор этой книги показал, что это действительно возможно и притом волнам материи нужно приписать только то свойство, что их энергия состоит из планковских элементов энергии¹.

Для этого вывода положим, что *частицы материи представляют центры энергии волн, групповая скорость которых является, таким образом, в качестве механической скорости*. Из сравнения классических принципов Мопертюи и Ферма мы сейчас же заключаем об *универсальной пропорциональности между механической скоростью v и обратной величиной волновой скорости $\frac{1}{\nu}$* ; иначе говоря, мы полагаем произведение из ν на v равным *универсальной постоянной*, которую обозначим через w^2 :

$$\nu v = w^2, \quad (33)$$

причем v и ν должны быть связаны тем же соотношением, что и величины g и ν в уравнении (13). Из уравнений (13) и (33) мы находим:

$$\frac{1}{\nu} = \frac{1}{w^2} \frac{d(\nu v)}{d\nu}$$

или

$$w^2 d\nu = v^2 d\nu + \nu d\left(\frac{v^2}{2}\right);$$

¹ Н а в а, «Phys. ZS», 28, 632, 1927.

а так как ω — величина постоянная, то мы можем также написать:

$$dy = -\frac{1}{2} \frac{d(\omega^2 - v^2)}{\omega^2 - v^2}.$$

Интегрированием этого дифференциального уравнения находим:

$$\ln y = \ln \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - v^2}} + \ln C,$$

где C — постоянная интегрирования; или

$$y = \frac{C}{\omega \sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2}}}. \quad (34)$$

До сих пор мы пользовались только гипотезой о существовании волн материи. Теперь присоединим к ней *планковскую* h -гипотезу, положив *произведение частоты на элементарный квант действия равным энергии частицы материи*. Введем новую постоянную K соотношением:

$$K = \frac{hC}{\omega^2}, \quad (35)$$

и найдем для энергии частицы материи

$$E = \frac{K\omega^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2}}}. \quad (36)$$

Для обсуждения этой формулы выскажем предварительно несколько коротких соображений, основанных на классической механике. Представим себе, что скорость тела массы m увеличивается благодаря прибавлению к ней бесконечно малой скорости dv в направлении движения. Благодаря этому «продольному» приросту скорости живая сила m , следовательно, энергия частицы увеличивается на mdv . Представим себе, с другой стороны,

силу P_1 , действующую по направлению движения и вызывающую ускорение v_1 ; тогда по второму закону Ньютона отношение $P_1: b_1$ должно совпадать с μ и можно написать уравнение:

$$dE = \frac{P_1}{b_1} v dv. \quad (37)$$

Дифференцируя уравнение (36) по v , находим;

$$\frac{dE}{dv} = \frac{Kv}{\left(1 - \frac{v^2}{w^2}\right)^{3/2}}. \quad (38)$$

С другой стороны, по второму закону Ньютона сила равна производной количества движения по времени. Мы представим себе силу и количество движения разложенными на две составляющих — одну *продольную*, в направлении движения, другую — *поперечную*, направленную перпендикулярно первой. Обозначая продольные составляющие индексом 1, а поперечные индексом 2, будем иметь для составляющих силы:

$$P_1 = \frac{d(mv_1)}{dt}, \quad P_2 = \frac{d(mv_2)}{dt}.$$

Если не исключать с самого начала возможность изменчивости массы (что было бы произвольно), то, так как $v_2 = 0$, а v_1 совпадает с v ¹:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}, \\ P_2 &= mb_2. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Наконец, на основании известного элементарного соотношения механики продольная составляющая ускорения равна производной скорости по времени, т. е.

$$b_1 = \frac{dv}{dt}.$$

¹ Это следует из того, что направление скорости совпадает с направлением движения.

Дели первое из уравнений (39) на b_1 , мы найдем на основании уравнений (37) и (38):

$$\frac{K}{\left(1 - \frac{v^2}{w^2}\right)^{1/2}} = m + v \frac{dm}{dv}. \quad (40)$$

Решением этого дифференциального уравнения является, как легко проверить, выражение

$$m = \frac{K}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{w^2}}}. \quad (41)$$

В самом деле, получаем:

$$\frac{dm}{dv} = \frac{K \frac{v}{w^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{w^2}\right)^{3/2}} = \frac{m \frac{v}{w^2}}{1 - \frac{v^2}{w^2}}$$

и отсюда:

$$m + v \frac{dm}{dv} = \frac{m}{1 - \frac{v^2}{w^2}}$$

в согласии с уравнением (40) и (41).

Положив в уравнении (41) v равным нулю, найдем:

$$m_0 = K, \quad (42)$$

где постоянная K представляет покоящуюся массу.

С другой стороны, в частном случае, когда w и v совпадают, по уравнению (33) v должно равняться w , и, таким образом, по уравнению (41) масса делается бесконечно большой, если только покоящаяся масса отлична от нуля. Наоборот, при скорости w масса, а по уравнению (36) и энергия, может оставаться конечной лишь в том случае, если покоящаяся масса исчезает. Поэтому мы должны отождествить скорость w с той скоростью, с которой движутся «невесомые», но все же обладаю-

щие количеством движения кванты света. Полагая, таким образом, w равным скорости света c и принимая во внимание уравнение (42), мы можем переписать уравнение (41) в виде:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (43)$$

Это уравнение представляет не что иное, как известное выражение массы, даваемое теорией относительности, по которой масса является *функцией скорости*. Из уравнения (43) мы заключаем, что механическая скорость тела, обладающего отличной от нуля покоящейся массой, никогда не может достигнуть скорости света. Сравнение уравнений (37) и (38) дает, если принять во внимание уравнение (42), известное релятивистское выражение для *продольной* массы (отношение $P_1 : b_1$), именно:

$$m_{\text{прод}} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}. \quad (44)$$

Для *поперечной* массы (отношение $P_2 : b_2$) из второй части уравнения (39) и из уравнения (43) находим:

$$m_{\text{попер}} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \quad (45)$$

что также находится в согласии с теорией относительности. Наконец, сравнение уравнений (36) и (41) ввиду равенства $w = c$ дает формулу:

$$E = mc^2, \quad (46)$$

т. е. основную теорему теории относительности об *инертной массе энергии*.

ДИФРАКЦИЯ ВОЛН МАТЕРИИ

Теория де-Бройля приводит к необходимому следствию, что движения частиц материи могут подвергаться воздействию со стороны других частиц материи, *аналогичному дифракции*. Именно, когда путь атома, или молекулы, или свободного электрона проходит так близко от какого-либо препятствия, что его расстояние оказывается того же порядка величины, что и длина соответствующей де-бройлевской волны, то, очевидно, должна иметь место дифракция волны; отсюда возникают отклонения движения от классических законов движения. К этому важному выводу из теории де-Бройля первые пришли Эйнштейн¹ и Эльзассер². Из основного соотношения теории де-Бройля, связывающего длину волны с количеством движения (уравнение (18)), следует, что для электрона, движущегося со скоростью примерно в $\frac{1}{100}$ скорости света, длина волны равна приблизительно 10^{-8} см; приблизительно ту же длину волны получим для протона, если он движется со скоростью, характерной для молекул газа при комнатной температуре. В том же отношении, в каком уменьшается скорость, растет длина волны де-Бройля; поэтому *заметные дифракционные явления волн материи* следует прежде всего искать в случае *медленных электронов* и при очень *низких температурах*.

Именно таким образом Эйнштейн пытался объяснить те замечательные отклонения от обычно справедливых законов, которые проявляются и у «идеальных» газов при *очень низких температурах*. Эйнштейн свел эти явления так называемого *вырождения газов* к тому, что при достижении определенной, очень низкой области температур длины де-бройлевских волн делают того же порядка величины, что диаметры молекул. С такой

¹ A. Einstein, Sitz-Ber. Berl. Akad. d. Wiss., 1925, S. 9.

² W. Elsasser, „Naturwiss.“, 13, 711, 1925.

точкой зрения находятся в согласии и опыты Гюнтера¹, который по предложению Нернста исследовал внутреннее трение водорода при очень низких температурах и обнаружил внезапно ускоряющееся падение вязкости при достижении определенной критической области температур.

Эльзассер дополнил изложенные представления Эйнштейна тем, что учел вероятность дифракционных явлений при столкновении свободных электронов с атомами. Прохождение свободных электронов через газы уже раньше детально изучалось многими экспериментаторами, например Рамзауэром²; Рамзауэр сделал при этом совершенно загадочное открытие, что в некоторых благородных газах³ свободные пути электронов с уменьшением скорости так увеличиваются, что медленные электроны кажутся проходящими через атомы почти беспрепятственно. Эльзассер обратил внимание на то, что таинственный эффект Рамзауэра следует отнести к дифракции связанных с электронами волн материи. Можно показать, что медленные электроны рассеиваются атомами по тем же формулам, по каким световые лучи, длина волны которых равна длине соответствующих волн материи, рассеиваются маленькими шариками, радиусы которых равны радиусам атомов.

Наиболее убедительное доказательство дифракции волн материи дали, однако, Дэвиссон и Джермер.

Еще в 1923 г. Дэвиссон и Кунсман⁴ получили указания на наличие селективного отражения медленных электронов от металлических поверхностей. Эльзассер первый обратил внимание на то, что эти опыты можно рассматривать как опытное подтверждение теории де-Бройля. В 1927 г. Дэвиссон совместно с Джермером⁵ проделал аналогичные опыты с кристаллами и этими опытами дал наиболее достоверное из существующих до сих пор подтверждение гипотезы о волнах материи. Дэвиссон и Джермер показали, что падающие на кристаллы электроны

¹ P. Günther, «Zs. f. Phys. Chemie», 110, 626, 1924.

² C. Ramsauer, «Ann. d. Phys.» 72, 345, 1923; также обзорная статья, R. Minkowski u. H. Sponer в «Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften», B. 3, 1924.

³ В химически недействительных благородных газах отсутствует «средство» к электрону.

⁴ C. J. Davisson and C. H. Kunsman, «Phys. Rev», 22, 243, 1923.

⁵ C. J. Davisson and Z. H. Germer, «Nature», 119, 550, 1927; «Phys. Rev.», 30, 705, 1927; «Bell System Techn. Journ.» 7, 1, 1928.

подвергаются со стороны кристаллов дифракции совершенно таким же образом, как рентгеновы лучи.

Узкий электронный пучок направлялся в этих опытах перпендикулярно маленькой пластинке, вырезанной из монокристалла никеля; количество рассеянных под разными углами электронов измерялось гальванометром. В совершенно определенных направлениях можно было установить резко выраженные максимумы, причем между этими направлениями и теми, в которых были бы по известным законам отражены рентгеновы лучи, удалось установить тесную связь¹. Именно, если известную структуру кристалла никеля представить себе сжатой в направлении, параллельном первичному пучку электронов (в отношении, лежащем между 0,7:1 и 0,9:1), то направления отражения рентгеновых лучей от такой сжатой структуры полностью совпали бы с наблюдаемыми в действительности электронными максимумами. Если, с другой стороны, из дифракционных явлений подсчитать длину участвующих в явлении волн материи, то она, действительно, в согласии с уравнением (18) оказывается равной элементарному кванту действия, деленному на произведение из массы на скорость. Появление указанного выше сокращения в поверхностном слое объясняется тем, что вследствие значительных сил притяжения, действующих на электроны внутри атомной решетки, электронные волны не только дифрагируют, но и подвергаются сильному преломлению; вследствие этого скорость электронов внутри кристалла всегда больше, а следовательно, длина волны меньше, чем до того как они попали в кристалл.

Существенным дополнением опытов Дэвисона и Джермера следует считать опыты Г. П. Томсона², в которых быстрые электроны (от 20 000 до 30 000 V, т. е. с длиной волны примерно 10^{-9} см) падали на очень тонкие фольги из золота и других металлов. Томсон получил при этом те же явления, которые Дебай и Шеррер наблюдали уже давно при прохождении через фольги рентгеновых лучей. На фотографической пластинке, поставленной за фольгой, в опытах Томсона образуются *дифракционные круги*, характерные и для опытов Дебая

¹ Из падающего непрерывного рентгеновского излучения кристалл, как известно, выделяет отраженным в определенных направлениях лишь лучи определенных длин волн.

² G. P. Thomson, «Proc. Roy. Soc. London», (A), 117, 600, 1928.

и Шэррера. Из размеров кругов Томсону удалось вычислить для металлических фольг постоянные кристаллических решеток в полном согласии со значениями, известными ранее по опытам с рентгеновыми лучами. Затруднения, возникавшие в опытах Дэвиссона и Джермера вследствие преломления, не играют роли в опытах Томсона, так как очень быстрые электроны не испытывают заметного преломления.

Понт получил дифракционные кольца в физической лаборатории Высшей нормальной школы (Ecole Normale Supérieure) в Париже при помощи кристаллов окиси цинка, заставляя падать на этот кристалл электроны скоростью примерно в 15 000 V, причем фотографическая пластинка отстояла от кристалла на 23 см.

В противоположность Томсону, электронные лучи которого соответствовали очень жестким рентгеновым лучам, Рупп получил весьма ясные дифракционные кольца, пропуская через очень тонкие фольги *медленные электроны*¹. При своих опытах Рупп воспользовался открытием Коля², что медленные электроны (примерно от 150 до 320 V) могут вызывать почернение обычных фотографических пластинок³; с другой стороны, ему послужил открытый Бекером⁴ интересный факт, что фольги обладают избирательной пропускательной способностью для электронов определенных скоростей. Наконец, Руппу удалось⁵ наблюдать дифракцию электронов и на обыкновенной оптической дифракционной решетке; он смог даже определить из этих опытов длину де-Бройлевских волн с точностью до 5%.

Кикучи⁶ подвергал электронные лучи дифракции в тонких листках слюды и получил при этом картины, совершенно аналогичные известным из оптики.

Было сделано также много опытов с целью повторить с волнами материи помимо интерференции и дифракции ряд других явлений, характерных для света (как, например, поляризацию); однако эти попытки до сих пор остались почти безуспешными.

¹ E. Rupp, «Ann. d. Phys.», 85, 981, 1928.

² K. Cole, «Phys. Rev.», 28, 781, 1926.

³ Чувствительность пластинок к действию медленных электронов может быть значительно повышена путем сенсибилизации маслом.

⁴ A. Becker, «Ann. d. Phys.», 84, 778, 1927.

⁵ E. Rupp, «Naturwiss.», 16, 656, 1928.

⁶ S. Kikuchi, «Japan Journ. Phys.», 5, 83, 1928.

ТЕОРИЯ ШРЕДИНГЕРА

Идеями де-Бройля установлена тесная связь между механическими явлениями и общими принципами, управляющими *распространением волн* и получившими наиболее ясное выражение в оптике. Основные уравнения обычной механики де-Бройль свел к принципу Ферма, который в частном случае оптически однородной среды постулирует *прямолинейное распространение света*¹. Однако известно, что и в случае однородной среды утверждение прямолинейного распространения света не совсем верно. Оно выполняется лишь приближенно и противоречит наблюдающимся в действительности явлениям *дифракции света*. Утверждение прямолинейного распространения света и вместе с ним принцип Ферма остаются справедливыми лишь в применении к областям *большим по отношению к длине волны света*.

В других случаях распространение света определяется другим принципом, высказанным во второй половине XVII в. Гюйгенсом и носящим его имя. Принцип Гюйгенса утверждает, что каждая точка, до которой достигает световая волна, в свою очередь делается *источником новых элементарных волн*, которые из этой точки распространяются по всем направлениям с той же скоростью, что и основные волны.

Точным математическим выражением принципа Гюйгенса является относительно простое дифференциальное уравнение, связывающее так называемый *лапласов оператор* какой-либо физической величины со *второй производной той же величины по времени*. Лапласовым оператором, обозначаемым обычно

¹ Если в уравнении (1) волновую скорость считать постоянной, то это уравнение говорит, что общий путь луча имеет минимум, т. е. он должен быть прямой линией, каковая и есть кратчайшая линия, соединяющая две точки.

символом Δ^1 , называют сумму *вторых производных данной величины по координатам* (эта величина не зависит от выбора координатной системы), т. е.

$$\Delta S = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}. \quad (47)$$

Если в частном случае физическая величина S обладает свойством, что ее лапласов оператор пропорционален второй производной по времени, т. е.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \chi \Delta S, \quad (48)$$

то, как вытекает из хорошо известных рассуждений теоретической физики², это дифференциальное уравнение выражает *волнообразное распространение* величины S с волновой скоростью

$$u = \sqrt{\chi}. \quad (49)$$

Далее из уравнения (48) (как показывается в теоретической физике) следует, что каждая точка, в которой волны создали возбуждение, сама делается источником *элементарных волн*, распространяющихся в однородной среде с той же скоростью и в виде *шаровых волн*.

Зависимость фазы от времени одинакова как для плоских, так и для шаровых волн; из уравнения (6) вытекает:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \doteq 2\pi\nu.$$

Поэтому, если в частном случае колебания имеют чисто *синусоидальный характер*, то, так как величина S выражается произведением амплитуды на синус фазы, а двукратное диффе-

¹ Часто вместо ΔS пишут символ $\Delta^2 S$.

² См., например, книгу автора «Введение в теоретическую физику», 3-е и 4-е издание (de Gruyter, Berlin 1923—1924), том I, § 43.

ренцирование синуса опять дает синус, но с обратным знаком, мы получим:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = A \frac{\partial^2 (\sin \varphi)}{\partial x^2} = -4\pi^2 \nu^2 A \sin \varphi = -4\pi^2 \nu^2 S.$$

На основании этого соотношения и уравнения (49) можно переписать уравнение (48) в применении к синусообразным волнам так:

$$\Delta S + \frac{4\pi^2 \nu^2}{u^2} S = 0. \quad (50)$$

Гениальная идея Шредингера заключается в том, что он стал искать такого обобщения механики, которое соответствовало бы переходу от принципа Ферма к принципу Гюйенса, т. е. от геометрической к волновой оптике. Явления дифракции волн материя, описанные в предыдущей главе, делают такой переход весьма естественным. Особенно просто это удается в случае одной частицы; в этом случае по соотношению теории де-Бройля между длиной волны и количеством движения уравнения (20) имеем:

$$\frac{\nu^2}{u^2} = \frac{m^2 \nu^2}{h^2}. \quad (51)$$

С другой стороны, кинетическая энергия $\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$ равна разности между *полной энергией* E и потенциальной V . Поэтому на основании уравнения (51) уравнение (50) можно написать в виде:

$$\Delta S + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) S = 0. \quad (52)$$

Это дифференциальное уравнение является основой механики Шредингера.

Из теории дифференциальных уравнений давно известно, что для какого-либо дифференциального уравнения можно найти решение во всех частях пространства однозначное, конечное и непрерывное лишь при некоторых определенных значениях входящих в уравнение *параметров*. Те значения, при которых такое решение возможно, носят название *характеристических чисел* данного дифференциального уравнения, а соответствующие

им решения называются *фундаментальными функциями*. В уравнении Шредингера постоянным параметром является полная энергия E , потенциальная же энергия зависит, конечно, от координат. Характеристические числа уравнения Шредингера в каком-либо частном случае представляют, следовательно, ряд *вполне определенных, дискретных значений энергии*. Таким образом *физическая задача о квантовании энергии сведена Шредингером к чисто математической задаче*; при этом для всех важнейших случаев эта математическая задача оказывается давно решенной.

Математический характер задачи о нахождении характеристических чисел мы кратко (не входя в более тонкие детали) поясним на двух простых примерах, имеющих значение для дальнейших соображений. Рассмотрим сначала функцию

$$y = e^{-\frac{a^2}{2}} \quad (53)$$

и составим выражения ее первой и второй производной по x обозначим их y' и y'' . Мы найдем:

$$y' = -xy, \quad (53')$$

а второе дифференцирование дает:

$$y'' = -y - xy';$$

на основании уравнения (53'), имеем:

$$y'' = y(-1 + x^2).$$

Если мы будем рассматривать дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (a - x^2)y = 0, \quad (54)$$

то увидим, что это уравнение имеет решение типа (53), если параметр a имеет значение, равное единице. Единица представляет, следовательно, *характеристическое число* этого уравнения.

К другому характеристическому числу мы придем, положив

$$y = 2xe^{-\frac{a^2}{2}}. \quad (55)$$

Мы найдем:

$$y' = 2e^{-\frac{a^2}{2}} + 2xe^{-\frac{a^2}{2}}(-x) = 2e^{-\frac{a^2}{2}}(1-x^2).$$

Второе дифференцирование дает:

$$y'' = 2e^{-\frac{a^2}{2}}(1-x^2)(-x) + 2e^{-\frac{a^2}{2}}(-2x)$$

или по уравнению (55):

$$y'' = y(-3 + x^2).$$

Таким образом и значение $a = 3$ представляет характеристическое число уравнения (54), которому соответствует решение уравнения (55).

Читатель легко может проверить вычислением, что следующие решения можно написать в виде:

$$y = He^{-\frac{a^2}{2}},$$

где величина H , которая для характеристических чисел 1 и 3 имеет значения 1 и $2x$, получает значения:

$$\begin{aligned} \text{для } a = 5: H &= 4x^3 - 2; \\ > a = 7: H &= 8x^3 - 12x; \\ > a = 9: H &= 16x^4 - 48x^2 + 12. \end{aligned}$$

Приведенные пять значений H представляют пять первых значений так называемых *полиномов Эрмита*, которые можно построить по простой формуле¹. Эрмитовы полиномы, умно-

¹ Полином Эрмита для характеристического числа $a = 2n + 1$ имеет вид:

$$H = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2}(2x)^{n-4} \dots$$

Ряд обрывается на том члене, в котором первый раз один из множителей обращается в нуль.

женные на $e^{\frac{a}{2}}$, представляют решения дифференциального уравнения (54), причем *нечетные целые числа* являются характеристическими числами задачи. Доказательство того, что указанные решения *единственные* и других не существует, слишком сложно, и мы сойдемся на подробные математические курсы¹.

В качестве второго примера рассмотрим вератце так называемые *шаровые функции*. Для получения дифференциального уравнения для этих функций мы преобразуем лапласов оператор *от прямолинейных координат к сферическим*. Как известно, так называют систему, определяющую положение точки расстоянием r от начала (неподвижной точки) и двумя углами, один из которых (если представим себе земной шар) соответствует географической долготе, а другой — дополнению широты. Преобразование приводит к выражению, которое в частном случае, когда r постоянно и равно единице, мы обозначаем символом Δ^* ².

Дифференциальное уравнение шаровых функций пишется в форме:

$$\Delta^* \phi + a \phi = 0 \quad (56)$$

и из теории этих функций следует³ (на чем мы подробнее здесь не будем останавливаться), что приведенное дифференциальное уравнение лишь тогда имеет отличное от нуля решение, которое на всей шаровой поверхности конечно и непрерывно (вместе со своими первыми производными), если соблюдается условие

$$a = n(n+1), \quad (57)$$

где n должно иметь целое значение. Таким образом числа

$$2, 6, 12, 20, 30, 42, 56 \dots$$

представляют *характеристические числа* дифференциального уравнения (56)

¹ См., например, R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, Berlin (Springer) 1924, стр. 261.

² Если φ — широта, а ϑ — угловое расстояние от полюса

$$\Delta^* \phi = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}.$$

³ Ср., т. например, Courant-Hilbert, Bd. I, стр. 264—266 и 422.

Глава седьмая

ПРИМЕРЫ НА МЕХАНИКУ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Мы поясним сперва метод Шредингера, сведший вопросы квантования к задачам о нахождении характеристических чисел, на простом примере осциллятора. Под осциллятором понимают частицу, например электрон, колеблющуюся около неизменного положения равновесия. Если колебания происходят по прямой линии, то осциллятор называют *линейным*; если далее колебание синусоидальное, то осциллятор называют *гармоническим*. Рассмотрением линейного гармонического осциллятора началась в 1900 г. квантовая теория; почти четверть века теоретическая физика сохраняла полученный тогда Планком вывод, что энергия такого осциллятора должна быть *целым кратным* произведения элементарного кванта действия на частоту. Теория Шредингера, однако, приводит к результату, отличному от названного.

Пусть положение равновесия будет началом координат, а прямая, по которой происходят колебания, осью x ; тогда, очевидно, $x = A \sin(2\pi\nu t)$, где A обозначает амплитуду.

Скорость получим, дифференцируя удаление x по времени:

$$v = A \cdot 2\pi\nu \cos(2\pi\nu t).$$

Живая сила (половина произведения массы на квадрат скорости) выразится так:

$$L = 2A^2\pi^2\nu^2 m \cos^2(2\pi\nu t).$$

Из этой формулы получим выражение энергии, заменяя косинус единицей: при прохождении положения равновесия потенциальная энергия равна нулю, так что максимальное возможное значение кинетической энергии равно полной энергии. Так как сумма квадратов синуса и косинуса равна единице,

то выражение *потенциальной энергии* получим, заменяя в последнем уравнении косинус на синус, а отсюда следует:

$$V = 2\pi^2\nu^2mx^2.$$

Для рассматриваемого случая линейного гармонического осциллятора уравнение Шредингера принимает вид (так как лапласов оператор сводится к второй производной по x):

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} (E - 2\pi^2\nu^2mx^2) S = 0.$$

Положим для сокращения

$$\frac{8\pi^2m}{h^2} E = \alpha \quad \text{и} \quad \frac{4\pi^2m\nu}{h} = \beta.$$

Далее, введем новую переменную при помощи определения

$$\xi = x\sqrt{\beta}.$$

Тогда получится:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} = \beta \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2}$$

и

$$x^2 = \frac{\xi^2}{\beta}.$$

Деля дифференциальное уравнение на β , мы получим формулу:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \xi^2\right) S = 0.$$

На основании сказанного в предыдущей главе характеристические числа этого уравнения определяются соотношением:

$$\frac{\alpha}{\beta} = 2n + 1.$$

где n — целое число. Из уравнений, определяющих значения α и β , получим:

$$E = (2n + 1) \frac{h\nu}{2}. \quad (58)$$

В теории Шредингера энергия линейного гармонического осциллятора оказывается *нечетным кратным половины элемента энергии, т. е.*

$$\frac{h\nu}{2}, \frac{3h\nu}{2}, \frac{5h\nu}{2}, \dots$$

Этот результат отличается от первой квантовой теории, по которой энергия целое кратное полного элемента энергии (т. е. $0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots$). В противоположность прежней квантовой теории в теории Шредингера наименьшее значение энергии осциллятора *отлично от нуля*. В теоретической физике *запас тепловой энергии твердых тел* сводится к энергии колебаний, которые атомы совершают около положений равновесия. Противоречия старой квантовой теории с некоторыми явлениями, наблюдающимися при чрезвычайно низких температурах, уже до Шредингера привели некоторых физиков, прежде всего Нернста, к гипотезе о так называемой *энергии абсолютного нуля* (Nullpunktsenergie). По этой гипотезе и при температуре абсолютного нуля, при которой по старой теории колебательная энергия должна целиком исчезать, каждый осциллятор обладает энергией $\frac{h\nu}{2}$. Это допущение, казавшееся ранее очень искусственным, теперь оказывается естественным следствием механики Шредингера.

В качестве второго примера применения механики Шредингера рассмотрим так называемый *ротатор*, который точно так же был детально изучен в старой квантовой теории. Под ротатором понимают частицу, движущуюся *на неизменном расстоянии от неподвижного центра*. Если движение происходит в одной плоскости, следовательно, по кругу, то ротатор имеет *неподвижную ось*. Если же движение не связано таким условием, т. е. частица движется по поверхности шара, то мы имеем ротатор со *свободной осью*. Именно такой ротатор мы рассмотрим здесь.

Если постоянное расстояние от центра положим равным единице длины, то в уравнении Шредингера мы можем заменить лапласов оператор символом Δ^* , введенным в прошлой главе. В противном случае нужно еще разделить на r^2 (r —расстояние), так как в лапласовом операторе квадраты дифферен-

циалов координат стоят в знаменателе. Таким образом вместо ΔS пишем Δ^*S/r^2 . Потенциальная энергия, а вместе с ней и кинетическая в случае ротатора постоянна. Обозначая кинетическую энергию через L (по умножении на r^2), напомним уравнение Шредингера в виде:

$$\Delta^*S + \frac{8\pi^2m}{\hbar^2} r^2 LS = 0. \quad (59)$$

Из сказанного в предыдущей главе о дифференциальном уравнении *шаровых функций* (уравнение (56)) мы знаем, что последнее уравнение имеет решение лишь при условии

$$\frac{8\pi^2mr^2L}{\hbar^2} = n(n+1), \quad (60)$$

где n —целое число.

В это уравнение целесообразно ввести момент количества движения U , представляющий произведение массы на скорость и на радиус шара, т. е.

$$U = mvr,$$

а так как, с другой стороны, кинетическая энергия равна $\frac{1}{2}mv^2$, то

$$mr^2L = \frac{1}{2}U^2.$$

По уравнению (60) должно быть:

$$\frac{4\pi^2U^2}{\hbar^2} = n(n+1),$$

или

$$U = \frac{\hbar}{2\pi} \sqrt{n(n+1)}. \quad (61)$$

И в случае ротатора результат теории Шредингера отличается от результата старой квантовой теории. Последняя для момента количества движения давала $n \frac{\hbar}{2\pi}$, следовательно, для отношения

$\frac{2\pi U}{h}$ числа 0, 1, 2, 3, 4,... Теория Шредингера дает для этого отношения не целые числа, а величины

$$0; 1,4142; 2,4395; 3,4641; 4,4721; \dots$$

И в случае ротатора механика Шредингера дает результаты, лучше совпадающие с данными опыта, чем старая теория (именно при рассмотрении так называемых *полосатых спектров*). В существенном полученное отличие опять обозначает введение *половинных квантовых чисел*¹. Вследствие постоянства потенциальной энергии разность двух произвольных значений энергии на основании выведенной выше формулы равна

$$E_1 - E_2 = \frac{h^2}{8\pi^2mr^2} [n_1(n_1 + 1) - n_2(n_2 + 1)].$$

С другой стороны, существует тождество:

$$n(n + 1) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Поэтому, действительно,

$$E_1 - E_2 = \frac{h^2}{8\pi^2mr^2} \left[\left(n_1 + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)^2 \right].$$

Весьма замечателен результат, к которому приводит механика характеристических чисел в случае *атома водорода*. Так как последний состоит из протона, вокруг которого движется электрон, *то потенциальная энергия равна*

$$V = -\frac{e^2}{r},$$

где e — элементарный электрический заряд, а r — расстояние между электроном и протоном. Уравнение Шредингера для атома водорода принимает вид:

$$\Delta S = \frac{8\pi^2m}{h^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) S = 0. \quad (62)$$

¹ Последние хотя уже раньше применялись в теории полосатых спектров, но удовлетворительного теоретического обоснования этого не существовало.

Нахождение характеристических чисел этого дифференциального уравнения довольно сложно, и мы должны ограничиться ссылкой на собственный вывод Шредингера¹. Как показал Шредингер, все *положительные числа* являются характеристическими, но лишь *дискретный ряд отрицательных* тоже дает решения. Энергия может принимать любые положительные значения, но лишь такие отрицательные, которые удовлетворяют уравнению:

$$E_n = -\frac{2\pi^2 me^4}{h^2 n^2}, \quad (63)$$

где n — целое число.

Характеристические числа атома водорода, задаваемые уравнением (63), полностью совпадают со значениями, найденными Бором в 1913 г., и, как показывает формула, *обратно пропорциональны квадратам главных квантовых чисел n* . С другой стороны, как уже было сказано, с числами Бора совпадают те значения, которые вытекают из первоначального представления де-Бройля о волнах материи, если это представление применить к периодическим движениям по замкнутым орбитам. В противоположность электронным движениям, для которых энергия отрицательна, те движения, при которых энергия *положительна*, оказываются *неквантованными*. Этот вывод совпадает с результатом прежней квантовой теории, которая, с одной стороны, постулировала *дискретные эллиптические орбиты* (в частности круговые), но, с другой, — не вводила никаких квантовых ограничений для незамкнутых *гиперболических* орбит, по которым электроны движутся вокруг ядра, когда они приближаются к этому последнему извне и затем опять удаляются от него².

В простейшей своей форме [уравнение (52)] уравнение Шредингера может быть применено и к тому важному случаю, когда движение электрона подвергается *возмущению* под действием относительно слабых внешних сил, например, под действием внешнего *электрического поля*.

¹ E. Schrödinger, «Ann. d. Phys.» 79, 361, 1926.

² Каждому расстоянию электрона от ядра соответствует некоторая определенная критическая скорость, при которой орбита становится параболической; при меньшей скорости — движение эллиптическое, при большей — гиперболическое. Критическая скорость электрона определяется корнем квадратным из удвоенной потенциальной энергии, деленной на массу.

Из теории дифференциальных уравнений вытекает, что характеристические числа и соответственные фундаментальные функции благодаря непрерывности изменяются лишь немного, если в уравнении прибавить достаточно *малый член*, выражающий *возмущение*. Если известны характеристические числа и решения первоначальной задачи, то можно вычислить те *изменения*, которые должны испытать эти величины под действием возмущения. Если a — характеристическое число «невозмущенного» уравнения, то можно найти ту величину a_1 , на которую соответствующее характеристическое число «возмущенного» уравнения отличается от a .

Если дифференциальное уравнение имеет *несколько независимых переменных*, как это в общем случае имеет место для уравнения Шредингера, то одному и тому же характеристическому числу соответствует *несколько решений*, иными словами, несколько фундаментальных функций. Если число этих функций равно s , то характеристическое число называют s -кратным, или же говорят, что s характеристических чисел совпадают. Весьма существенным результатом определенных математических рассуждений является то, что в случае наличия возмущения значения a_1 вовсе не должны совпадать, так как эти величины зависят и от самих фундаментальных функций, которые различны между собой. Таким образом при возмущении на место кратного характеристического числа становится *группа* различных характеристических чисел, которые, однако, мало *отличаются* друг от друга и от первоначального числа. Последнее, как говорят, *расщепляется* либо полностью на s составляющих, либо частично.

Вполне точно проведенные рассуждения этого характера и их применение к движению электрона в электрическом поле привели Шредингера к формуле, которая совпадает с полученной еще в 1916 г. Эпштейном. Эта формула описывает в согласии с опытом *расщепление значений энергии*, а следовательно и *спектральных линий в электрическом поле*, т. е. она дает теорию так называемого *эффекта Штарка*. Для изменения энергии в электрическом поле получается формула:

$$\Delta E = \frac{3}{8\pi^2} \frac{h^2 F}{m_0} n (k_2 - k_1), \quad (64)$$

где F — напряжение поля, n — «главное квантовое число», k_1 и k_2 — два других тоже целых квантовых числа, которые могут быть либо положительными, либо нулями; сумма их, по крайней мере, на единицу меньше главного квантового числа.

Задачи, рассмотренные до сих пор, все относятся к *одному* электрону. Для рассмотрения явлений, в которых принимает участие более одной материальной частицы (так называемая *многоэлектронная* задача), уравнению Шредингера придают более общий вид. Если символом Δ_1 обозначим сумму вторых производных по координатам первой частицы и массу ее через m_1 и т. д., то *обобщенное уравнение Шредингера*, как будет показано в одной из следующих глав (см. уравнение 120), имеет вид:

$$\frac{1}{m_1} \Delta_1 S + \frac{1}{m_2} \Delta_2 S + \dots + \frac{8\pi^2}{h^2} (E - V) S = 0. \quad (65)$$

Следует, впрочем, иметь в виду, что это уравнение уже не представляет настоящего волнового уравнения в обычном смысле этого слова. Описываемый им процесс можно понимать как «волну» лишь в $3n$ -мерном пространстве, так называемом *пространстве конфигураций*; n представляет число частиц, координаты же пространства конфигураций равны отрезкам длины, умноженным еще на корень квадратный из массы соответственной частицы¹. Что касается величины S , то сам Шредингер принял, что она является *мерой средней плотности электрических зарядов*; именно периодические изменения этой средней плотности вызывают излучение совершенно так же, как это имеет место в классической теории².

¹ Усложнения координат, имеющих размерность длины, умноженной на квадратный корень из массы, можно избежать в том случае, когда массы всех частей одинаковы.

² О статистическом понимании величины S см. в гл. XI.

Глава восьмая

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ГЕЙЗЕНБЕРГА

Теория Шредингера, построенная на идеях де-Бройля, не является единственной попыткой нового построения механики атома. На несколько месяцев раньше появилась основанная Гейзенбергом *квантовая механика*, которая впрочем, как удалось показать Шредингеру, находится в тесной связи с теорией последнего. Это тем более замечательно, что цель, к которой стремился Гейзенберг, была совершенно отлична от того, к чему стремились де-Бройль и Шредингер. Тогда как последние два исследователя стремились объяснить область физики атома методами *классической физики* и перебросить мост через пропасть, отделявшую «квантовую» физику атома от классической физики, Гейзенберг исходил из прямо противоположной точки зрения: именно, что только путем полного отказа от пользования классическими представлениями можно действительно достичь понимания закономерностей атома.

Согласно убеждению Гейзенберга всякое стремление к наглядности в области физики атома заранее следует признать бессмысленным и бесцельным, от него нужно отказаться и прежде всего *изменить* из теории атома все те величины, которые *недоступны непосредственному наблюдению*.

На место старой квантовой теории, в основе которой лежали представления об электронных орбитах, не доступные опытной проверке, Гейзенберг хотел поставить новую квантовую механику, которая содержит лишь соотношения между наблюдаемыми на опыте величинами. Таковыми по Гейзенбергу являются только *частоты и интенсивности* характерных для атома *спектральных линий*, а также *уровни энергии атомов*, которые можно установить независимо от спектроскопии, например, опытами с электронным ударом; задачей новой квантовой механики Гейзенберг считал прежде всего образование из спектральных величин, таких годных для расчетов величин, которые

могли бы заменить координаты и скорости электронов; далее, между этими величинами нужно было установить соотношения возможно ближе к картине классической механики так, чтобы затем найти правила квантования; последнее нужно было бы сделать по возможности в большем согласии с опытом и с более широкой областью приложения, чем это позволяла сделать старая теория.

Путь, которым Гейзенберг пошел для осуществления этой программы, опирался на теорему, установленную Фурье в начале XIX в. По теореме Фурье произвольную, периодически изменяющуюся величину можно представить наложением чисто синусоидальных колебаний, каждое из которых по уравнению (3) может быть выражено уравнением:

$$q_n = A_n \sin(2\pi\nu_n t + \epsilon_n), \quad (66)$$

где A представляет амплитуду, а ϵ — фазовую постоянную. (Кстати напомним, что частоты ν_n все являются целыми кратными той частоты, с которой меняется рассматриваемая величина; коэффициенты A_n можно вычислить из функциональной зависимости этой величины от времени ¹.) Периодическое изменение рассматриваемой величины можно, таким образом, заменить совокупностью частичных колебаний:

$$q_1, q_2, q_3, \dots$$

Для последующих рассуждений оказывается целесообразным представлять колебания не тригонометрическими, а экспоненциальными функциями. Для этого пользуются известной формулой Муавра:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

¹ Именно, если $\varphi(x)$ представляет периодическую функцию, можно положить:

$$\varphi(x) = \sum_n a_n \sin(nx) + \frac{1}{2} b_0 + \sum_n b_n \cos(nx).$$

Вычисление показывает, что

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \sin(nx) dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \cos(nx) dx.$$

где i означает мнимую единицу ($\sqrt{-1}$). Пользуясь формулой Муавра в уравнении, содержащем показательное выражение с мнимым показателем, можно, как известно, разделить действительную часть от мнимой (в последней пропускают множитель i), и уравнение сводят к требованию равенства действительных и мнимых частей. Если воспользоваться этим искусственным приемом, весьма употребительным в теоретической оптике, то каждое колебание можно представить в форме:

$$S = Ae^{i(2\pi\nu t + \epsilon)}. \quad (67)$$

Если будем рассматривать лишь мнимую часть, то получим:

$$S = A \sin(2\pi\nu t + \epsilon),$$

и мы видим, что дифференцированием уравнения (67) получим соотношение:

$$\frac{dS}{dt} = 2\pi i\nu Ae^{i(2\pi\nu t + \epsilon)},$$

которое, если опять рассматривать лишь мнимую часть, равносильно выражению, непосредственно получающемуся из предпоследней формулы, а именно:

$$\frac{dS}{dt} = 2\pi\nu A \cos(2\pi\nu t + \epsilon).$$

Применяя формулу Муавра, мы находим очень простое соотношение между колеблющейся величиной и ее производной по времени, именно:

$$\frac{dS}{dt} = 2\pi i\nu S. \quad (68)$$

Наконец, вводя сокращение

$$Ae^{i\epsilon} = a, \quad (69)$$

мы вводим *комплексную амплитуду* a и тем самым делаем излишним добавление фазовой постоянной ϵ . Таким образом уравнение (67) переписывается в форме:

$$S = ae^{2\pi i\nu t}.$$

Интенсивность колебания задается квадратом действительной амплитуды, т. е.

$$A^2 = |a|^2 = aa^*,$$

если, как обычно, через a^* обозначить величину, сопряженную¹ с a , т. е. в нашем случае (по уравнению (69):

$$a^* = Ae^{-ia}.$$

Гейзенбергу пришла в голову счастливая мысль заменить *периодически изменяющиеся координаты электрона совокупностью частных колебаний, частоты которых совпадают с частотами тех спектральных линий, которые по прежним представлениям испускались данным электроном при изменении соответственной координаты. Так как каждой спектральной частоте соответствует переход между двумя состояниями атома, то, очевидно, частные колебания, соответствующие одному электрону, образуют двойное множество; в отличие от ряда Фурье их можно представить квадратной схемой, например, так (если нумерацию начнем с нуля и это число отнесем к основному состоянию):*

$$\left. \begin{array}{cccc} q_{00} & q_{01} & q_{02} & q_{03} \dots \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & q_{13} \dots \\ q_{20} & q_{21} & q_{22} & q_{23} \dots \\ q_{30} & q_{31} & q_{32} & q_{33} \dots \end{array} \right\} \quad (70)$$

При этом, если мы значки будем приписывать не внизу, а в скобках, будем иметь:

$$q(n, m) = a(n, m) e^{2\pi i \nu(n, m)t}. \quad (71)$$

Величина $a(n, m)$ опять представляет *комплексную амплитуду, величина которой является мерой вероятности перехода между n -м и m -м состояниями, так что квадрат этой величины определяет интенсивность спектральной линии, вызванной этим пере-*

¹ Комплексной величине $x+iy$ является сопряженной величиной $x-iy$. Обе величины имеют одинаковую абсолютную величину, равную $\sqrt{x^2+y^2}$.

ходом. Так как переход следует считать одинаково вероятным в обоих направлениях, то абсолютные величины $a(n, m)$ и $a(m, n)$ должны быть равны.

Поэтому естественно считать сопряженными две комплексные амплитуды, соответствующие взаимно противоположным переходам, т. е.

$$a(m, n) = a^*(n, m).$$

Если далее постулировать также, что

$$q(m, n) = q^*(n, m), \quad (72)$$

то из уравнения (71) должно быть

$$\nu(m, n) = -\nu(n, m), \quad (73)$$

и в частности

$$\nu(n, n) = 0. \quad (74)$$

Если координате электрона q соответствует схема (70), то слагающей скорости электрона можно сопоставить аналогичную схему, элементы которой представляют производные по времени от элементов первой схемы. Мы полагаем, следовательно,

$$q(n, m) = 2\pi i \nu(n, m) q(n, m). \quad (75)$$

Вторичным дифференцированием по времени этих элементов, мы найдем новую схему, которая заменит слагающую ускорения электрона \ddot{q} ; таким образом получится соотношение:

$$\ddot{q}(n, m) = 4\pi^2 \nu^2(n, m) q(n, m). \quad (76)$$

Из уравнения (75) можно получить важный вывод для частного случая, когда в какой-либо схеме

$$q(n, m) = 0 \quad (77)$$

при $m \neq n$.

В этом случае все элементы схемы, кроме диагональных, исчезают, так что схема принимает простой вид:

$$\begin{matrix} D_{00} & 0 & 0 \\ 0 & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{22} \end{matrix}$$

Образую производную по времени от такой диагональной схемы, мы легко убедимся в том, что все члены новой схемы равны нулю. По уравнению (75) эти члены имеют форму:

$$2\pi i v(n, m) D(n, m).$$

Члены, для которых n отлично от m , равны нулю, так как мы предположили схему диагональной, члены же, у которых n равно m , исчезают потому, что в этом случае по уравнению (74) $v(n, m)$ равно нулю.

Соображения, высказанные до сих пор, делают естественной мысль о возможности производить с рассматриваемыми схемами определенные вычисления: мы видели пример этому в дифференцировании по времени. Подобным же образом можно определить схему q'' как сумму или разность схем q и q' , если

$$q''(n, m) = q(n, m) \pm q'(n, m). \quad (78)$$

Труднее дать целесообразное определение умножения. Гейзенберг считает схему q'' произведением схемы q на схему q' , если

$$q''(n, m) = \sum_k q(n, k) q'(k, m), \quad (79)$$

т. е. надо сперва умножить первый член n -ой горизонтали первой схемы на первый член m -ой вертикали второй схемы, далее, второй член n -ой горизонтали первой схемы на второй член m -ой вертикали второй схемы и т. д. и затем сложить все эти произведения.

Легко сообразить, что на основании этого определения умножение не имеет свойства коммутативности. Результат умножения зависит от того, умножить ли первую схему на вторую или вторую на первую. Можно поэтому говорить о разности произведений q на q' и представлять ее символом $q'q - qq'$ ¹.

¹ Возьмем для простоты схему всего из двух вертикалей и двух горизонталей и умножим ее на другую такую же схему. Нам нужно составить произведение:

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Bmatrix}.$$

Основным допущением квантовой механики Гейзенберга является то, что разность произведений схем, сопоставляемых слагающей количества движения (импульсу) электрона и соответствующей координате, представляет сама диагональную схему, причем все диагональные члены лишь простым численным множителем отличаются от *элементарного кванта действия*.

Обозначив через p слагающие количества движения (импульса) и положив для сокращения

$$pq - qp = D, \tag{80}$$

будем иметь:

$$D(n, m) = \begin{cases} z\hbar & \text{при } m = n, \\ 0 & \text{при } m \neq n, \end{cases} \tag{81}$$

где z обозначает названный численный множитель. То, что Гейзенберг выбрал произведение импульса на координату, вполне понятно, так как именно эта величина имеет размерность величины \hbar , как это всем хорошо известно из прежней квантовой теории ¹.

Чтобы дальнейшие следствия теории совпадали с данными опыта, численный множитель z в уравнении (81) нужно положить равным $\frac{1}{2} \pi i$. Если символом e обозначим *диагональную единичную* схему:

$$\begin{array}{c} 1\ 0\ 0\ 0\ \dots \\ 0\ 1\ 0\ 0\ \dots \\ 0\ 0\ 1\ 0\ \dots \\ 0\ 0\ 0\ 1\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}$$

По правилу умножения (79), обозначая произведение ab через c , а произведение ba через d , найдем:

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ \text{и} \\ d_{11} &= a_{12}b_{11} + a_{21}b_{12} \\ d_{12} &= a_{12}b_{21} + a_{22}b_{12}. \end{aligned}$$

Обозначая разность произведений через f , получим:

$$\begin{aligned} f_{11} &= c_{11} - d_{11} = a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} \\ f_{12} &= c_{12} - d_{12} = a_{12}(b_{22} - b_{11}) + b_{12}(a_{11} - a_{22}) \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

¹ Количество движения имеет размерность $\text{г}\cdot\text{см}/\text{сек}$ произведение количества движения на координату, следовательно, имеет размерность $\text{г}\cdot\text{см}^2/\text{сек}$, т. е. $\text{эрг}\cdot\text{сек}$.

то так называемое *правило перестановки* (Vertauschungsrelation) Гейзенберга примет вид:

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i} \epsilon. \quad (82)$$

Как видно из этого уравнения, ошибка, которую делают, считая, что умножение количества движения на координату обладает свойством коммутативности, имеет абсолютную величину порядка 10^{-27} . Для макромеханики эта ошибка, конечно, не имеет никакого значения. Иначе дело обстоит в механике атома, так как правая сторона уравнения (82) (не считаясь с множителем $\frac{\epsilon}{i}$) совпадает с тем значением, которое в нормальном состоянии атома водорода имеет произведение количества движения на радиус.

Если в частном случае q представляет обычную декартову координату, то соответствующий импульс просто равен произведению массы, которую обозначим буквой μ^1 , на скорость; таким образом импульсу мы можем сопоставить схему, элементы которой равны умноженным на массу элементам схемы скоростей (уравнение 75). Соотношение Гейзенберга принимает форму:

$$[\dot{q}q - q\dot{q}]_{nm} = \frac{h}{2\pi i \mu} \epsilon_{nm}, \quad (83)$$

по уравнению (75):

$$[\dot{q}q]_{nm} = 2\pi i \sum_k \{v(n, k) q(n, k) q(k, m)\},$$

и, наоборот,

$$[q\dot{q}]_{nm} = 2\pi i \sum_k \{q(n, k) v(k, m) q(k, m)\},$$

поэтому

$$[\dot{q}q - q\dot{q}]_{nm} = 2\pi i \sum_k \{[v(n, k) - v(k, m)] q(n, k) q(k, m)\}. \quad (84)$$

¹ Мы пользуемся этим обозначением вместо обычного m , чтобы не смешивать с индексом m .

Если мы положим $m = n$, то по правилу перестановки выйдет:

$$\sum_k \{[\nu(n, k) - \nu(k, n)] q(n, k) q(k, n)\} = -\frac{\hbar}{4\pi^2\mu}. \quad (85)$$

Для пояснения этого соотношения на очень простом примере, мы опять применим его к случаю *линейного гармонического осциллятора*. Единственной координатой в этом случае является расстояние от положения равновесия; из рассуждения гл. VII мы знаем, что в классической механике, к которой мы будем стараться держаться возможно ближе, уравнение движения осциллятора имеет вид:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 4\pi^2\nu_0^2 q = 0, \quad (86)$$

где буквой ν_0 обозначена частота осциллятора (мы добавили индекс 0, чтобы можно было отличать собственную частоту осциллятора от частоты испускаемого им излучения). В квантовой механике вместо координаты и ускорения мы должны подставить соответственные схемы согласно уравнению (76). Мы находим:

$$-4\pi^2\nu_0^2 (n, m) q(n, m) + 4\pi^2\nu_0^2 q(n, m) = 0,$$

а отсюда следует:

$$\nu(n, m) = \pm \nu_0. \quad (87)$$

В ряде значений частоты $\nu(n, m)$, который получим, считая постоянным индекс n и изменяя m , *отличными от нуля* будут только *два* значения, которые мы можем считать *соседними*, именно, такие, для которых

$$m = \begin{cases} n - 1; \\ n + 1. \end{cases}$$

Точно так же, если считать постоянным m , то в ряде значений $\nu(n, m)$ отличны от нуля лишь те, для которых n равно либо $(m - 1)$ либо $(m + 1)$.

Если теперь в частном случае линейного гармонического осциллятора мы построим схему, соответствующую импульсу или скорости, то в ней отличными от нуля будут лишь следующие члены: в первой горизонтали — второй член, во второй — первый и третий, в третьей — второй и четвертый и т. д. Аналогичное правило справедливо и для вертикалей. Если звездочкой обозначить член, отличный от нуля, то в схеме, соответствующей скорости или пропорциональному ей импульсу, два соседние с главной диагональю наклонных ряда будут состоять из звездочек:

$$\begin{array}{l}
 0^* 0 0 0 0 \dots \\
 * 0^* 0 0 0 \dots \\
 0^* 0^* 0 0 \dots \\
 0 0^* 0^* 0 \dots \\
 0 0 0^* 0^* \dots \\
 \dots \dots \dots \\
 \dots \dots \dots \\
 \dots \dots \dots
 \end{array}$$

Возвращаясь к уравнению (85), мы видим, что в сумме, фигурирующей в этом уравнении, отличны от нуля лишь те два члена, для которых k равно n' или n'' , если обозначить для сокращения $(n+1)$ через n' , а $(n-1)$ через n'' . Далее, по уравнению (73) $\psi(n, k)$ и $\psi(k, n)$ равны и противоположны по знаку, а по уравнению (87) они равны по абсолютной величине ν_0 . Наконец, мы должны иметь в виду, что индексу n' соответствует состояние с большей энергией, чем индексу n , так как при переходе излучение поглощается, и соответствующую частоту нужно считать отрицательной; наоборот, состояние, которое соответствует индексу n'' , имеет меньшую энергию, и переход сопровождается излучением, когда частоту нужно считать положительной. Поэтому левая часть уравнения (85) принимает форму:

$$-2\nu_0 [q(n, n') q(n', n) - q(n, n'') q(n'', n)].$$

Правило перестановки дает поэтому соотношение:

$$q(n, n') q(n', n) = q(n, n'') q(n'', n) + \frac{h}{8\pi^2\nu_0}.$$

Так как нумерацию рядов мы начинаем с индекса 0, то все члены с отрицательным индексом мы должны считать равными нулю. Положив для сокращения

$$\frac{h}{8\pi^2\mu\nu_0} = Q, \quad (88)$$

мы получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} q(0, 1)q(1, 0) &= Q, \\ q(1, 2)q(2, 1) &= q(0, 1)q(1, 0) + Q = 2Q, \\ q(2, 3)q(3, 2) &= q(1, 2)q(2, 1) + Q = 3Q, \end{aligned}$$

следовательно, в общем случае

$$q(n-1, n)q(n, n-1) = nQ, \quad (89)$$

Получив это соотношение как частное выражение правила перестановки, мы постараемся найти значения энергии осциллятора по Гейзенбергу. Мы видели в гл. VII, что потенциальная энергия линейного гармонического осциллятора дается выражением:

$$V = 2\pi^2\nu_0^2\mu q^2,$$

где положено ν_0 вместо ν , μ вместо m , q вместо x . Прибавив сюда в качестве кинетической энергии половину произведения массы на квадрат скорости, мы получим выражение полной энергии классической механики в форме:

$$E = 2\pi^2\nu_0^2\mu q^2 + \frac{1}{2}\dot{q}^2.$$

В квантовой механике мы заменяем квадрат координаты по уравнению (79) соотношением:

$$[q^2]_{km} = \sum_k q(n, k)q(k, m).$$

Аналогично мы преобразуем и квадрат скорости и на основании уравнения (75) получим соотношение:

$$[q^2]_{nm} = -4\pi^2 \sum_k \{v(n, k) v(k, m) q(n, k) q(k, m)\}.$$

Для энергии, таким образом, мы также получим некоторую схему; мы находим:

$$E(nm) = 2\pi^2\mu \sum_k \{[v_0^2 - v(n, k) v(k, m)] q(n, k) q(k, m)\}. \quad (90)$$

Примем сперва в этом уравнении m и n отличными между собой; тогда на основании сказанного выше исчезнут все слагаемые кроме тех, для которых либо n, k, m , либо m, k, n представляют три последовательных числа. В этом случае, однако, обе величины $v(n, k)$ и $v(k, m)$, равные по абсолютной величине v_0 , совпадают и по знаку. Таким образом выражение в квадратных скобках в уравнении (90) обращается в нуль.

Отсюда следует:

$$E(n, m) = 0 \text{ при } m \neq n. \quad (91)$$

Энергии соответствует, таким образом, *диагональная* схема, что на основании сказанного выше (в связи с уравнением (77)) обозначает *постоянство во времени, т. е. сохранение энергии*.

Если же $m = n$, то из слагаемых уравнений (90) отличны от нуля те, для которых k равно либо n' , либо n'' . В обоих этих случаях

$$v(n, k) v(k, n) = (+v_0)(-v_0).$$

Мы находим поэтому

$$E(n, n) = 4\pi^2\mu v_0^2 [q(n, n') q(n', n) - q(n, n'') q(n'', n)].$$

На основании уравнения (89), выражающего правило перестановки, мы можем написать:

$$E(n, n) = 4\pi^2\mu v_0^2 [(n+1) Q + nQ].$$

Наименьшее значение энергии E_0 мы получим, положив в этом уравнении $n=0$; на основании уравнения (88) мы найдем тогда

$$E_0 = \frac{h\nu_0}{2}.$$

Для больших значений энергии из предпоследнего уравнения следует:

$$E_n = \frac{2n+1}{2} h\nu_0. \quad (92)$$

Энергия оказывается, таким образом, *нечетным кратным половиной элемента энергии*, и, таким образом, она никогда не исчезает совсем. В этом результате, отличном от выводов старой квантовой теории, квантовая механика Гейзенберга полностью совпадает с теорией Шредингера. Уравнение (87) приводит также к важному выводу, что *квантовые переходы возможны лишь между соседними состояниями* осциллятора; наконец, из уравнения (92) вытекает, что выполняется и так называемое боровское *условие частот*, т. е., что частота кванта, испускаемого или поглощаемого при таком переходе, равна *изменению энергии, деленному на элементарный квант действия*.

Глава девятая

МАТРИЧНАЯ МЕХАНИКА

Вскоре после того как Гейзенберг развил свои новые идеи, Борн и Иордан нашли для проведения программы Гейзенберга подходящий математический аппарат в так называемом *исчислении матриц*; эта область математики, которой до сих пор физика совсем не пользовалась, была весьма детально разработана около середины XIX в. Под *матрицей* понимают *квадратную схему*, каждый элемент которой характеризуется *двумя индексами*; при этом для *сложения* и, в общем случае *некоммутативного умножения* матриц справедливы как раз те правила, которые предложил Гейзенберг, вовсе не имея в виду исчисления матриц¹.

В этой главе, основываясь на матричной механике, мы дадим общее доказательство того, что из *правила перестановки* Гейзенберга получаются в качестве *необходимых следствий закон сохранения энергии и боровское условие частот*.

Для проведения этого доказательства мы сперва остановимся на некоторых общих математических теоремах, причем они оказываются связанными с соображениями предыдущей главы. Матрицы мы будем обозначать *жирными буквами*; вычислим сперва разность произведений двух матриц D и A , первая из которых *диагональная*. На основании уравнения (79) мы находим:

$$[DA]_{nm} = \sum_k D(n, k) A(k, m).$$

По определению диагональной матрицы, в этой сумме не равен нулю только один член, именно тот, для которого $k = n$, и поэтому

$$[DA]_{nm} = D(n, n) A(n, m).$$

¹ В частном случае матрица называется *эрмитовой*, если при перестановке обоих индексов элемент ее переходит в сопряженный (по уравнению (72)).

С другой стороны,

$$[AD]_{n,m} = \sum_k A(n, k) D(k, m),$$

и в этой сумме отличен от нуля лишь член, для которого $k = m$, следовательно,

$$[AD]_{n,m} = A(n, m) D(m, m).$$

Для равенности произведений мы получаем, таким образом, соотношение:

$$[DA - AD]_{n,m} = A(n, m) [D(n, n) - D(m, m)]. \quad (93)$$

Мы видим из этого уравнения, что в частном случае, когда все диагональные члены диагональной матрицы D равны между собой, разность произведений равна нулю, следовательно, умножение коммутативно¹. Мы имеем:

$$DA - AD = 0, \quad (94)$$

если D — диагональная матрица и

$$D(n, n) = D(m, m).$$

Очевидно, что легко получить и обратную теорему. Если оказывается, что умножение матрицы B на любую другую матрицу A коммутативно, то отсюда следует, что матрица B диагональна с равными диагональными членами. Для n , m -го члена разности произведений мы находим:

$$\sum_k \{B(n, k) A(k, m) - A(n, k) B(k, m)\}.$$

¹ Как видно из уравнения (93), умножение двух произвольных диагональных матриц всегда коммутативно. Так как, если A диагональная матрица, как и D , то в правой части уравнения (93) исчезает член $A(n, m)$ для n не равного m ; наоборот, для $n = m$ оказывается равным нулю выражение в квадратных скобках.

Если, как мы предположили, A — совершенно произвольная матрица, эта сумма может равняться нулю лишь в том случае, когда $B(n, m) = 0$ для m не равного n и, во-вторых, если $B(n, n) = B(m, m)$.

Из уравнения (94) следует, что умножение произвольной матрицы на *единичную коммутативно*, если единичную матрицу ϵ определить уравнением:

$$\epsilon(n, m) = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n, \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases} \quad (95)$$

Таким образом всегда справедливо соотношение:

$$\epsilon A = A \epsilon,$$

Матрицу, которую можно обозначить символом A^{-1} , мы назовем *обратной матрице* A , если

$$AA^{-1} = \epsilon. \quad (97)$$

Из этого определения следует, что *единичная матрица обратна самой себе*.

По закону матричного умножения

$$[\epsilon\epsilon]_{nm} = \sum_k \epsilon(n, k) \epsilon(k, m).$$

Здесь $\epsilon(n, k) = 0$ всегда, когда $k \neq n$, также $\epsilon(k, m) = 0$ если $m \neq k$. Мы находим поэтому:

$$[\epsilon\epsilon]_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n, \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases}$$

Таким образом по уравнению (95):

$$\epsilon\epsilon = \epsilon$$

или по уравнению (97):

$$\epsilon^{-1} = \epsilon. \quad (98)$$

Деление на матрицу мы считаем тождественным умножению на обратную матрицу; поэтому производную матричной функции

$$y = f(x)$$

по матрице-аргументу x мы определим соотношением:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(x+a) - f(x)}{a}, \quad (99)$$

где матрица a представляет произведение обыкновенного числа на единичную матрицу, т. е.

$$a = a\varepsilon.$$

Тогда по уравнению (98)

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \{ [f(x - a\varepsilon) - f(x)] \varepsilon \}. \quad (100)$$

Если в частности $y = x$, то мы находим, учитывая правило матричного умножения,

$$\begin{aligned} \left[\frac{dx}{dx} \right]_{nm} &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \sum_l \{ [x(n, l) + a\varepsilon(n, l) - x(n, l)] \varepsilon(l, m) \} = \\ &= \sum_l \varepsilon(n, l) \varepsilon(l, m) = [\varepsilon\varepsilon]_{nm}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\frac{dx}{dx} = \varepsilon. \quad (101)$$

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две произвольные целые алгебраические функции от матрицы-аргумента x . Составим произведение матриц fg и дифференцируем его по x . По уравнению (99) мы находим:

$$\frac{d(fg)}{dx} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} [f(x+a)g(x+a) - f(x)g(x)],$$

или, прибавляя и вычитая в квадратных скобках член $f(x+a)g(x)$:

$$\frac{d(fg)}{dx} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \{ f(x+a)g(x+a) - f(x+a)g(x) + \\ + f(x+a)g(x) - f(x)g(x) \},$$

следовательно, по уравнению (99):

$$\frac{d(fg)}{dx} = f \frac{dg}{dx} + \frac{df}{dx} g. \quad (102)$$

Положив в частности

$$f(x) = g(x) = x,$$

получим по уравнению (102) и (101):

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x. \quad (103)$$

Рассмотрим теперь матричную функцию W двух матричных аргументов p и q , разность произведений которых представляет матрицу ke , т. е.

$$pq - qp = ke. \quad (104)$$

Легко показать, что имеют место два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} Wq - qW &= k \frac{\partial W}{\partial p}, \\ pW - Wp &= k \frac{\partial W}{\partial q}. \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

Доказательство нижеследующее: сперва допустим, что уравнения (105) справедливы для двух произвольных функций f и g . Положив сперва $W=f$, а затем $W=g$, мы сразу видим, что уравнения (105) справедливы и для $W=f+g$. Далее, можно показать, что уравнение (105) оправдывается и для $W=fg$. Для этого мы воспользуемся тождеством

$$fgq - qfg = f(gq - qg) + (fq - fq)g$$

(т. е. мы прибавляем и вычитаем член fgq). Но так как мы предположили, что уравнения (105) удовлетворяются для функций f и g , то первое выражение в скобках равно $k \frac{\partial q}{\partial p}$, а второе: $k \frac{\partial f}{\partial p}$. Отсюда мы находим:

$$(fgq - qfg) = k \left(f \frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p} g \right)$$

или по уравнению (102):

$$(fg)q - q(fg) = k \frac{\partial (fg)}{\partial p}.$$

Аналогично получим:

$$p(fg) - (fg)p = k \frac{\partial (fg)}{\partial q}.$$

Таким образом, если уравнения (105) справедливы для двух функций f и g , то они справедливы и для функций $f+g$ и fg . Следовательно, уравнения (105) должны быть справедливы и для любой функции, составленной из f и g повторным применением сложения и умножения. Но очевидно, что уравнения (105) удовлетворяются для $W=p$ и для $W=q$; поэтому они справедливы и для любой целой функции p и q , и наше доказательство закончено.

После этих общих математических соображений мы теперь вернемся опять к физике и будем считать q координатной матрицей, а p соответствующей ей матрицей-импульсом. Мы будем исходить из уравнений движения классической механики, которые целесообразно будет написать в так называемой канонической форме. При этом, как известно, энергия считается функцией координат и импульсов—так называемая гамильтонова функция $H(p, q)$. Этой гамильтоновой функции мы также сопоставим матрицу H и напишем известные канонические уравнения; при этом, переходы к матричной механике, мы поставим только жирные буквы вместо H, p, q , т. е.

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}. \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

Так как гамильтонова функция H , представляющая собою энергию, в качестве функции p и q должна удовлетворять уравнениям (105), то мы получим, положив $k = \frac{h}{2\pi i}$, согласно правилу перестановки Гейзенберга, два соотношения:

$$\left. \begin{aligned} Hq - qH &= \frac{h}{2\pi i} \dot{q}, \\ pH - Hp &= -\frac{h}{2\pi i} \dot{p}. \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь одно первое уравнение.

Это уравнение легко сопоставить со спектральными термами, разности которых представляют частоты, которые может вызвать рассматриваемый электрон.

Для этого образуем из термов диагональную матрицу согласно схеме:

$$\begin{array}{ccc} T_{00} & 0 & 0 \\ 0 & T_{11} & 0 \\ 0 & 0 & T'_{22} \end{array}$$

причем по определению термов

$$T(n, n) - T(m, m) = \nu(n, m)^1. \quad (108)$$

Если мы теперь умножим диагональную матрицу термов на координатную матрицу, то по уравнению (93) мы найдем:

$$[Tq - qT]_{nm} = q(n, m) [T(n, n) - T(m, m)]$$

или по уравнению (108):

$$[Tq - qT]_{nm} = q(n, m) \nu(n, m).$$

¹ Вывод, что двойное многообразие спектральных частот атомов можно свести к простому многообразию термов, появился раньше квантовой теории атома и до установления боровского условия частот был высказан Ритцем (1908). При этом Ритц воспользовался еще более старыми представлениями Ридберга. Во всяком случае так называемый принцип Ридберга-Ритца возник совершенно независимо от квантовой теории.

На основании уравнения (75) получается соотношение:

$$Tq - qT = \frac{1}{2\pi i} \dot{q}, \quad (109)$$

и сравнение с уравнением (107) дает:

$$Hq - qH = h(Tq - qT)$$

или

$$(H - hT)q - q(H - hT) = 0. \quad (110)$$

На основании сказанного по поводу уравнения (94) это значит, что матрица $H - hT$ диагональная с равными диагональными членами. Но матрица T сама диагональная, и мы находим, что матрица энергии также должна быть диагональной, причем элементы ее могут отличаться от элементов диагональной матрицы hT лишь одинаковой для всех членов аддитивной постоянной. Таким образом, с одной стороны,

$$H(n, m) = 0 \text{ для } n \neq m \quad (111)$$

и, с другой,

$$H(n, n) - H(m, m) = h[T(n, n) - T(m, m)]. \quad (112)$$

Из того, что матрица H — диагональная, следует (на основании сказанного в связи с уравнением (77)), что

$$H = 0. \quad (113)$$

Это матричное уравнение выражает закон сохранения энергии. С другой стороны, из уравнения (112) и (108) получаем соотношение:

$$H(n, n) - H(m, m) = h\nu(n, m). \quad (114)$$

Это уравнение выражает боровское условие частот; оно сопоставляет определенному изменению атомного состояния некоторый квант света, частота которого определяется отношением изменения энергии к элементарному кванту действия. Таким образом в квантовой механике закон сохранения энергии и

условие частот действительно оказываются необходимыми следствиями правила перестановки Гейзенберга.

В первоначальной теории Бора элементарный квант действия играл *двойную роль*: с одной стороны, *оптически-спектральной* постоянной, с другой, — *постоянной атомной механики*. Первая роль получала свое выражение в *условии частот*, вторая в *боровском правиле квантования*, по которому умноженный на 2π момент количества движения считался равным целому кратному кванта действия. Каким образом одна и та же величина могла иметь эти два значения: одно — волновое, другое — динамическое, если можно так выразиться ради краткости, в теории Бора оставалось непонятным. Теория де-Бройля сочла волновую роль величины h первичной и вывела из нее динамическую, как необходимое следствие. Квантовая механика указала на противоположную возможность и первичный характер придала атомнодинамической роли величины h , а отсюда уже вывела спектрально-волновое значение кванта действия.

Глава десятая

СВЯЗЬ МЕЖДУ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКОЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА И ТЕОРИЕЙ ШРЕДИНГЕРА

Когда Шредингер создал свою теорию несколькими месяцами позже обоснования квантовой механики Гейзенбергом, то естественно возник вопрос о соотношении между обеими теориями. Самому Шредингеру¹ удалось установить эту связь и показать, что, несмотря на все различия точек зрения, теория Шредингера математически совершенно эквивалентна квантовой механике Гейзенберга-Борна. Однако точное доказательство этой эквивалентности слишком сложно и требует чересчур больших предварительных знаний в области математики; поэтому оно не может быть включено в эту элементарную книжку; мы приведем в нижеследующем лишь основную идею этого доказательства.

Мы будем исходить из представления о математическом операторе. Известно, например, что дифференцирование функции y по аргументу x можно символически представить как умножение y на оператор $\frac{d}{dx}$.

Аналогичным образом вторая производная от y по x может быть понимаема как умножение y на оператор $\frac{d^2}{dx^2}$. И самую величину x можно считать оператором, выражающим умножение на x ; в этом смысле можно говорить об операторе, применение которого к какой-либо функции дает эту самую функцию. Под произведением двух операторов можно понимать

¹ E. Schrödinger, Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen, «Ann. d. Phys.», (4), 79, 734, 1926.

² Всем известен из векторного анализа гамильтонов оператор ∇ , понимаемый, как вектор с компонентами $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$; вычисления с ним производятся, как с вектором.

такой оператор, который дает тот же результат, что и последовательное применение двух операторов. В этом смысле вторая производная является *квадратом* первой, а произведение операторов $\frac{d}{dx} x$ обозначает дифференцирование по x произведения какой-либо функции на x .

Умножение двух операторов, очевидно, не является коммутативным, так что и для операторов можно устанавливать *правила перестановки*. Воспользуемся, например, тождеством:

$$\frac{\partial (xy)}{\partial x} = y + x \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Отбрасывая в этой формуле функцию y и переходя, таким образом, к операторам, мы можем установить операторное равенство:

$$\frac{\partial}{\partial x} x - x \frac{\partial}{\partial x} = 1; \quad (115)$$

это значит, что если мы умножим какую-либо функцию на x , продифференцируем затем по x и вычтем из результата произведение производной этой функции на x , то мы опять получим прежнюю функцию.

Уравнение (115) мы можем, конечно, еще умножить на произвольное постоянное число¹. В качестве такого числа мы выберем $\frac{\hbar}{2\pi i}$ и под оператором x , обозначающим умножение на x , будем понимать оператор q , обозначающий умножение на координату q ; тогда мы получим *правило перестановки* в форме:

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q} q - q \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{\hbar}{2\pi i} \cdot 1. \quad (116)$$

Сравним это соотношение с правилом перестановки Гейзенберга (уравнение (82)); мы видим, что, заменяя координатную матрицу оператором q (обозначающим умножение на q), мы должны заменить *матрицу-импульс оператором*

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial l}. \quad (117)$$

¹ Так как $d(ay)/dx = ay'/dx$, если a — постоянно.

Этот замечательный результат был впервые получен Борном и Винером¹; он открывает возможность *обобщения механики* тем, что в каком-либо основном уравнении *классической механики*, связывающем координаты q с импульсами p , нужно заменить q оператором q , а p оператором, определяемым формулой (117). В качестве такого уравнения целесообразно принять *уравнение энергии*. Если будем рассматривать *одну* материальную точку и обозначим ее три координаты через q_x, q_y, q_z , то, имея в виду, что $p_x = m\dot{q}_x$ и т. д., для живой силы получим:

$$L = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2).$$

Обозначив, далее, через V потенциальную энергию, зависящую только от координат, и через E полную энергию, получим уравнение энергии в форме:

$$\frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V - E = 0. \quad (118)$$

Если теперь понимать левую сторону этого уравнения как оператор, то согласно формуле (117) нужно заменить выражение в скобках в уравнении (118) через

$$\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial q_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_z^2}\right) = -\frac{h^2}{4\pi^2} \Delta,$$

где Δ обозначает лапласов оператор (ср. уравнение (47)). Если теперь S — произвольная функция координат, то мы получаем соотношение:

$$\left\{ -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta + V - E \right\} S = 0 \quad (119)$$

или

$$\Delta S + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) S = 0.$$

В последней формуле мы узнаем *основное уравнение* теории Шредингера (уравнение (52)). Это уравнение получается, таким образом, как распространение классической механики при помощи правила перестановки Гейзенберга и его применения к операторам.

¹ M. Born und N. Wiener, «Zs. f. Phys.» 36, 174, 1926.

Если вместо одной материальной точки рассматривать систему их и обозначить слагающие импульсы n -ой частицы через p_{nx} , p_{ny} , p_{nz} , то уравнение (118) примет вид:

$$\sum_n \frac{1}{2m_n} (p_{nx}^2 + p_{ny}^2 + p_{nz}^2) + V - E = 0,$$

где теперь V — общая потенциальная энергия и E — полная энергия системы. Уравнение (119) можно написать в виде:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{8\pi^2} \sum_n \frac{1}{m_n} \Delta_n + V - E \right\} S = 0, \quad (120)$$

и отсюда получается обобщенное уравнение Шредингера в форме (ср. уравнение (65)):

$$\sum_n \frac{1}{m_n} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y_n^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z_n^2} \right) + \frac{8\pi^2}{\hbar^2} (E - V) S = 0.$$

Из решений, даваемых уравнением Шредингера, в каком-нибудь частном случае, можно вычислить элементы матрицы соответствующей задачи квантовой механики. Обозначим характеристические числа задачи Шредингера, например, нумеруя их в порядке величины, через A_0, A_1, A_2, \dots , а соответствующие решения, т. е. фундаментальные функции $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$, тогда можно составить двойное многообразие чисел по формуле:

$$a(n, m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(q) q \varphi_m^*(q) dq \quad (121)$$

и второе двойное многообразие по формуле:

$$b(n, m) = \frac{\hbar}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(q) \frac{\partial \varphi_m^*(q)}{\partial q} dq \quad (122)$$

(здесь φ^* обозначает величину комплексно-сопряженную φ). Как показали Шредингер и Эккарт¹ (мы не приводим слож-

¹ С. Eckart, «Phys. Rev.», 28, 711, 1926.

ного вывода), уравнения (121) и (122) действительно представляют решения соответствующей задачи квантовой механики, причем

$$q(n, t) = a(n, t) e^{2\pi i v(n, t)t}, \quad (123)$$

$$p(n, t) = b(n, t) e^{2\pi i v(n, t)t}. \quad (124)$$

Таким образом можно решать задачи физики атома по методу *характеристических чисел* Шредингера, что вообще говоря, легче, чем вычисление с помощью матриц, а затем на основании уравнения (121) и (122) получать и решение задачи в *матричном* виде; матричные величины $a(n, t)$ дают *вероятности* переходов, определяющие *интенсивности спектральных линий*.

Кроме теории Шредингера матричная механика имеет много точек соприкосновения и с третьей теорией атома, также возникшей в 1925 г. Это основанная Дираком *механика чисел q* (*q-Zahlenmechanik*)¹.

Она основывается на допущении, что величины квантовой механики нужно представлять особого рода *сверхкомплексными* числами, которые Дирак называет *q-числами*; последние отличаются от обычных чисел (называемых Дираком *s-числами*) тем, что для них *закон коммутативности умножения не оправдывается*. Числами *q* Дирак выражает не только координаты и импульсы и энергию, являющуюся функцией координат и импульсов, но и самое *время*². В остальном результаты применения теории Дирака к частным задачам физики атома совпадают с тем, что получается по теории Шредингера и Гейзенберга.

¹ P. A. M. Dirac, «Proc. Roy. Soc. London», (A), 109, 642, 1926; 110 561, 1926.

² Благодаря тому, что в теории Дирака пространственные координаты и время имеют одинаковый характер (именно являются *q-числами*), в этой теории переход к теории относительности гораздо легче, чем в матричной механике, где пространственные координаты являются матрицами, тогда как время имеет характер обычной величины.

**ПРИЧИННОЕ И СТАТИСТИЧЕСКОЕ ПОНИМАНИЕ ФИЗИКИ
АТОМА**

Мы видели, что теории Шредингера и Гейзенберга-Борна-Иордана, несмотря на прямо противоположные точки зрения, математически эквивалентны и связаны между собой; это обстоятельство делает важным вопрос, как основное представление каждой из теорий следует интерпретировать с точки зрения другой. В центре теории Шредингера стоит представление о волне, в центре квантовой механики — частица. Что представляет с точки зрения Шредингера электрон, а с точки зрения Гейзенберга волна материи?

На первый вопрос дал ответ в свое время де-Бройль. Он представлял частицы материи как места *наибольшей плотности энергии в волнах*. Шредингер разработал эту мысль для частного случая линейного осциллятора. Пусть ψ_n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) решения, которые имеет в этом случае волновое уравнение; Шредингер¹ рассматривал группы фундаментальных функций, следовательно, группу *собственных колебаний*, для которой значения n лежат вблизи некоторого определенного *большого числа*; тогда частоты все ограничены очень узкой областью. Шредингеру удалось показать, что при *наложении* колебаний этой узкой области (при графическом изображении) получается относительно высокий и узкий *гребень*, колеблющийся взад и вперед *по тем же механическим законам*, что материальная частица линейного осциллятора. Далее, Шредингер показал, что такая группа волн или *пакет энергии* при определенных условиях может достаточно долго *держаться вместе*, т. е. энергия остается концентрированной в небольшом пространстве (эта область, впрочем, перемещается); таким образом в течение соответствующего времени заметного

¹ E. Schrödinger, Der stetige Übergang von der Mikromechanik. Zur Makromechanik «Naturwiss», 14, 634, 1916.

растекания пакета энергии не происходит (в общем случае этого растекания нельзя избежать)¹.

Интерпретация волн материи, прямо противоположная в своей тенденции взглядам Шредингера, была впервые предложена Борном². Теория Шредингера основана на представлении строго *причинной связи*. С одной стороны, она исходит из допущения, что состояние волнового поля может быть в любой момент точно описано, с другой,— из постулата, что из заданного начального состояние поля в любой последующий момент может быть точно определено. Поэтому и основное уравнение теории Шредингера имеет тот характер, который типичен для классической причинной физики. На первый взгляд кажется загадочным, почему такое уравнение, которое предполагает *причинность, непрерывность, возможность пространственно-временного представления*, тем не менее (вследствие математической эквивалентности теорий Шредингера и Гейзенберга), дает правильные результаты в применении к квантовым явлениям, которые по самой своей природе *прерывны* и не могут быть описаны обычным пространственно-временным образом.

Разрешение этого кажущегося противоречия удалось Борну благодаря тому, что он предложил считать ту величину, которая по названному уравнению распространяется волнообразно в пространстве конфигураций, *вероятностью в статистическом смысле*. Такое толкование подсказывается соотношением между гипотезой световых квантов и классической волновой теорией света. В этой последней *квадрат амплитуды* задает *интенсивность света* в данном месте, но с точки зрения ги-

¹ Если ω_0 — первоначальная ширина пакета волн и m — его масса, то при движении в отсутствии внешних сил ширина пакета в момент t , как показал Эренфест («Zs. f. Phys.», 45, 455, 1927) выражается формулой:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{\hbar^2}{4\pi^2 m^2 \omega_0} t^2.$$

Время удвоения начальной ширины, например, для массы в 1 г и ширины 10^{-3} см, оказывается не меньшим, чем примерно 10 миллиардов лет. Для массы протона и начальной ширины 10^{-8} см это время оказывается равным всего 10^{-13} сек.

² М. Born, «Zs. f. Phys.», 37, 863, 1926; 38, 803, 1926.

потезы квантов света эта интенсивность определяется лишь вероятностью *пребывания кванта света в данном месте*¹.

Такая интерпретация дает возможность совместить представление, что направление движения *отдельного* кванта *не детерминированно, случайно*, с точной закономерностью, которая проявляется в наблюдаемых на опыте оптических явлениях *интерференции и дифракции*.

Далеко идущая аналогия между квантом света и электроном² делает естественным перенесение этих представлений на волны Шредингера. В пространстве *конфигураций*, имеющем для случая *n* частиц 3^n измерений (например, для двух частиц — шесть измерений), конфигурация системы в любой момент представляется мгновенным положением некоторой «изображающей точки». С точки зрения Борна никогда нельзя точно сказать, где будет находиться изображающая точка в следующей момент, иначе говоря, нельзя указать направление «движения» изображающей точки. Все, что по Борну способна дать квантовая механика, это *вероятность* того, что *изображающая точка пойдет по известному направлению*. Однако сама эта вероятность является *непрерывной* и детерминированной величиной и может поэтому удовлетворять дифференциальному уравнению «классического» типа, каким является уравнение Шредингера³.

Понимание атомной физики с точки зрения принципа причинности наталкивается на принципиальные затруднения; Гейзенберг⁴ иллюстрировал это обстоятельство, показав, что даже в *воображаемом* мысленном опыте нельзя *одним измерением* произвести идеально точное определение координаты и идеально точное определение соответствующего импульса

¹ Эта точка зрения делает лишним непонятное допущение, что кванты могут уничтожать друг друга; однако она показывает, что при известных условиях вероятность попадания кванта в определенное место, несмотря на близость источников света, может быть так мала, что это место остается темным.

² Особенно ясно эта аналогия показана в статье G. Beck, «Zs. f. Phys.», 43, 653, 1927.

³ В гл. VII уже было упомянуто, что сам Шредингер пытался поставить в связь величину, определяемую его уравнением, с плотностью электрических зарядов.

⁴ W. Heisenberg, Über den anschaulichen Inhalt der quantenmechanischen Kinematik und Mechanik, «Zs. f. Phys.», 43, 172. 1927.

(скорости); таким образом всякое измерение *атомных величин* связано с *неточностью*.

Представим себе электрон, движущийся в атоме; казалось бы мыслимо единым измерением найти его положение и скорость; для осуществления этого, для определения места электрона следовало бы «осветить» его, пользуясь соответствующим «микроскопом» и одновременно найти его скорость, воспользовавшись эффектом Доплера и определив изменение длины волны лучей, служивших для освещения, при их отбрасывании *движущимся* электроном. Но с этим наблюдением неизбежно связан эффект Комптона, заключающийся в том, что при *столкновении кванта света* с электроном скорость последнего меняется.

С одной стороны, положение электрона можно определить тем точнее, чем короче длина волны применяемых для освещения лучей (следовало бы воспользоваться гамма-лучами, длина волны которых, примерно, в 5—100 раз меньше, чем радиус нормальной орбиты в атоме водорода¹ по теории Бора). Но, с другой стороны, чем короче длина волны лучей, тем сильнее проявляется эффект Комптона, следовательно, тем большее изменение во время наблюдения и вследствие его получит скорость электрона. Таким образом, если мы хотим получить большую точность при определении скорости по эффекту Доплера, то нужно пользоваться лучами с возможно большей длиной волны, чтобы неизбежный эффект Комптона мешал возможно меньше. Но при большей длине волны, как было сказано раньше, невозможно точное определение места электрона. Таким образом точность в определении положения связана с отказом от точного определения скорости; наоборот, точное определение скорости исключает точное определение положения. *Перестановительное соотношение* (уравнение (82) Гейзенберга является выражением этого *соотношения неопределенности*, так как даже в случае наибольшей мыслимой точности определения произведение связанных с одним измерением ошибок в определении координаты и соответствующего импульса определяется величиной элементарного кванта действия и равно ему по порядку величины.

¹ Длина волны жестких гамма-лучей включает от 5 до 100 X-единиц, нормальный радиус атома водорода около 500 X-единиц; X-единица 10^{-11} см.

Если точное описание атомных явлений в классическом смысле невозможно, то, конечно, *принцип причинности теряет свое значение в физике*. Ведь этот принцип, согласно которому точное знание настоящего дает возможность точного предвычисления будущего, делается бессодержательным, если точное знание настоящего недостижимо. *Причинность с точки зрения квантовой механики нужно отрицать для элементарных процессов в физике; она имеет место лишь для вероятностей, которые нужно сопоставить индивидуальным процессам из статистических соображений.*

Глава двенадцатая

ПРИНЦИП ПАУЛИ

Выводы квантовой механики находятся в тесной связи с важными положениями, установленными Паули за год до появления теории Гейзенберга; выводы Паули касались *периодической системы элементов*. Можно сказать, что развитие вопроса о химических элементах является одним из блестящих примеров того, как всякий успех науки заключается в постепенном переходе положений качественных в количественные, математические.

В случае периодической системы возможность этого обнаружилась прежде всего с открытием электронов: качественное различие химических элементов можно было свести к различию в расположении первичных частичек материи; далее, сыграло роль открытие в 1913 г. Мозелем *естественного ряда элементов*. В этом ряду каждый элемент получил определенный *порядковый номер* (например номер водорода — 1, гелия — 2, железа — 26, золота — 79, уран имеет наивысший номер — 92); оказалось, что этот номер равен числу электронов, которые окружают ядро в нейтральном (незаряженном) атоме.

Открытие порядковых номеров элементов сделало возможным точное установление *химической периодичности*. Семь периодов в системе элементов известно уже с 1870 г.¹; но только со времени открытия Мозеля оказалось возможным точно установить *длины периодов*, именно не считая последнего неполного периода;² 2, 8, 8, 18, 18 и 32. Основной задачей современной теории периодической системы явилось квантовое объяснение

¹ Периодическая система элементов открыта одновременно Менделеевым и Лотар Мейером.

Прим. перев. Ссылки на Мейера, частые прежде в немецкой литературе, в последнее время начинают исчезать; фактически содержание открытия Мейера не совпадает с тем, что сделал Менделеев, а меньше его; во время работы Мейера ему была уже известна работа Менделеева, на которую он ссылается.

² Седьмой период кончается на шестом месте ураном. Все периоды начи-

этих чисел; последние тем более должны были вызывать интерес физиков, что все они являются удвоенными квадратами ¹ натурального ряда чисел. Существенный шаг вперед к разрешению этой задачи удалось сделать в 1924 г. Паули; он исходил тогда из принципа *четверного квантования атомных состояний*.

После того как в 1913 г. Бор ввел в теорию атома понятие о квантовом числе, Зоммерфельд и В. Вильсон одновременно и независимо пришли в 1915 г. к выводу, что необходимо пользоваться еще *вторым квантовым числом*, если только заранее не ограничить теорию рассмотрением только частного случая круговых орбит. Из двух квантовых чисел теории Зоммерфельда одно, обычно называемое *побочным* и обозначаемое в настоящее время буквой *l*, определяет *момент количества движения* электрона в его периодическом движении вокруг ядра. Второе квантовое число, которым пользуется Зоммерфельд, называется всегда *главным*; в частном случае, когда вокруг ядра атома движется всегда *один* электрон, это число приблизительно определяет *энергию*, так как эта последняя обратно пропорциональна квадрату главного квантового числа. Атомная механика приводит к выводу (на этом мы ближе не будем останавливаться), что величина *l* может принимать все целые значения от нуля до $(n - 1)$; т. е.

$$l = 0, 1, 2, \dots, (n - 1). \quad (125)$$

В 1925 г. Уленбек и Гаудсмит ² высказали гипотезу, оказавшуюся необычайно плодотворной для новейшей теории атома; это гипотеза о *собственном вращении электрона*; она дала возможность просто объяснить ряд опытных фактов спектроскопии, которые прежде было очень трудно понять. Они приняли, что это вращение электронов вокруг собственной оси (по-английски сокращенно «Spin» — веретено) дает электронам свойства *магнетиков*. Различая возможность вращения электрона в *двух противоположных направлениях*, они приняли, что при этом алгебраическая разность квантовых чисел должна равняться

являются щелочным металлом и заканчиваются инертным газом (только первый период начинается водородом).

¹ Именно: $2 = 2 \cdot 1^2$; $8 = 2 \cdot 2^2$; $18 = 2 \cdot 3^2$; $32 = 2 \cdot 4^2$.

² G. E. Uhlenbeck und S. Goudsmit, «Naturwiss.» 13, 953 1925, «Nature», 117, 264, 1926.

единице; самому же моменту вращения электрона приписали половинное квантовое число ¹.

В магнитном поле электроны, как маленькие магнитики, должны устанавливаться либо по направлению поля, либо против него.

С другой стороны, как уже раньше показал Ланде, вектор, характеризующий момент количества движения электрона по орбите, в магнитном поле может занимать лишь такие исключительные положения, чтобы его составляющая по направлению поля квантовалась (т. е. выражалась целым числом). Обозначим соответствующее квантовое число через $m(l)$; оно может при этом принимать все целые значения от $-l$ до $+l$, т. е. всего $(2l + 1)$ различных значений. Таким образом в магнитном поле каждому электрону соответствует четыре квантовых числа: главное (n), побочное (l), квантовое число $m(l)$, определяющее слагающую момента количества орбитального движения электрона по направлению поля и, наконец, число $m(r)$, дающее слагающую момента собственного вращения электрона; по скачкообразному выше это число может равняться $-\frac{1}{2}$ или $+\frac{1}{2}$.

Основной принцип Паули заключается в том, что никогда два электрона в атоме не могут иметь все четыре квантовых числа совершенно одинаковыми. Электроны, обладающие одинаковыми значениями чисел n и l , Паули называет эквивалентными. На основании сказанного выше для эквивалентных электронов возможно $(2l + 1)$ различных значений числа $m(l)$; а каждое значение $m(l)$ может комбинироваться с двумя различными значениями $m(r)$, именно: $-\frac{1}{2}$ и $+\frac{1}{2}$.

Отсюда следует, что для заданного значения побочного квантового числа l возможны лишь $4l + 2$ эквивалентных электрона. Это даст следующие максимальные числа:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \text{ для } l=0 \\ 6 \text{ » } l=1 \\ 10 \text{ » } l=2 \\ 16 \text{ » } l=3 \\ 18 \text{ » } l=4 \\ \dots \end{array} \right\} \quad (126)$$

¹ См. по этому поводу W. Heisenberg und P. Jordan, «Zs. f. Phys.» 37, 263, 1926.

Для пояснения принципа Паули представим себе, что планетные электроны атома разделены на *группы*, характеризуемые определенными значениями главного квантового числа (I, II, III, IV и т. д.); внутри группы будем отличать *подгруппы* по определенным значениям *побочного квантового числа*. Приписав значение побочного квантового числа в качестве индекса к главному квантовому числу, обозначенному римской цифрой, найдем согласно уравнению (125), что возможны следующие подгруппы; I_0 ; II_0 , II_1 ; III_0 , III_1 , III_2 ; IV_0 , IV_1 , IV_2 , IV_3 ; V_0 и т. д.

Если мы, например, обозначим символом III_{01} трехквантовую группу, в которой содержатся не все три возможные подгруппы ($l=0$, $l=1$, $l=2$), а лишь две первые, то мы найдем следующие числа *заполнения* групп (X обозначает произвольное главное квантовое число):

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= 2 \\ X_{01} &= 8 \\ X_{012} &= 18 \\ X_{0123} &= 32 \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

и т. д. Но именно эти же числа определяют, как мы видели, длины отдельных периодов в системе элементов.

Действительно, для *благородных газов, замыкающих* отдельные *периоды*, получается следующая схема (благородным газам соответствуют порядковые номера: 2, 10, 18, 36, 54 и 86)¹:

$$\left. \begin{aligned} \text{Гелий} &= I_0 \\ \text{Неон} &= I_0 + II_{01} \\ \text{Аргон} &= I_0 + II_{01} + III_{01} \\ \text{Криптон} &= I_0 + II_{01} + III_{012} + IV_{01} \\ \text{Ксенон} &= I_0 + II_{01} + III_{012} + IV_{012} + V_{01} \\ \text{Эманация} &= I_0 + II_{01} + III_{012} + IV_{0123} + V_{012} \end{aligned} \right\} \quad (128)$$

¹ Из этой схемы следует (мы заметим это лишь мимоходом), что для строения системы элементов характерно постепенное заполнение *внутренних* электронных групп. Трехквантовая группа заполняется совершенно лишь в четвертом периоде, четырехквантовая — в пятом и шестом; заполнение пятиквантовой группы продолжается также в шестом периоде, но не доходит до конца.

Подставляя вместо символов на правой стороне численные значения согласно уравнению (127), мы найдем:

$$\begin{array}{rcl}
 2 & = & 2 \\
 2 + 8 & = & 10 \\
 2 + 8 + 8 & = & 18 \\
 2 + 8 + 18 + 8 & = & 36 \\
 2 + 8 + 18 + 18 + 8 & = & 54 \\
 2 + 8 + 18 + 32 + 18 + 8 & = & 86
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} 2 \\ 2 + 8 \\ 2 + 8 + 8 \\ 2 + 8 + 18 + 8 \\ 2 + 8 + 18 + 18 + 8 \\ 2 + 8 + 18 + 32 + 18 + 8 \end{array}} \right\}$$

Схема (128), устанавливающая расчленение периодической системы, в существенных чертах была установлена Стонером¹ в связи с несколько более старыми идеями Бора². Более глубокий смысл этой «арифметики» периодической системы был открыт лишь благодаря принципу Паули³.

¹ E. C. Stoner, «Phil. Mag.» 48, 719, 1924.

² N. Bohr, «Zs. f. Phys.» 9, 1, 1922.

³ Принцип Паули дает возможность при заданной электронной группировке атома определить тип основного терма в спектре данного элемента. Наоборот, если известен из опыта основной терм, пользуясь принципом Паули, можно определять электронную группировку данного атома.

КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА ВОЗЕ

Для новейшей физики типично уничтожение «противоречия» между частицами и волнами, следовательно, между материей и светом; это обстоятельство играет весьма существенную роль для задач *статистической физики*. Эти задачи раньше разделялись на две резко отличные группы: одни относились к *материи*, другие к *свету* в широком смысле слова. Статистическая физика частиц материи уже к середине XIX в. была доведена до высокой степени совершенства *кинетической теорией газов*. В области световых волн статистические соображения сделались возможными, с одной стороны, благодаря понятию о *собственных колебаниях*¹, с другой, — с введением представления об *элементах энергии $h\nu$* —или *световых квантах*. Когда физики обнаружили, что кванты света обладают *количеством движения*, как частицы материи, явилась мысль о том, что методы и выводы первой группы статистических задач можно перенести на вторую; обратная возможность открылась вместе с гипотезой о волнах материи.

Первый существенный опыт решения задачи теории излучения при помощи методов кинетической теории газов относился к фундаментальному вопросу о том, как *спектральное распределение электромагнитных волн* в пустом пространстве *зависит от температуры*. Решение этой задачи в 1900 г. привело к знаменитому *закону излучения*, установленному Планком на почве гипотезы об *элементарном кванте действия*. В связи с новыми взглядами было естественно вывести планковский закон излучения, рассматривая излучение, наполняющее пространство, как *газ из квантов света*, в котором возможные значения количества движения распределяются по отдельным индивидуумам, как в «материальном» газе; только в последнем коли-

¹ Ср. соображения о принципе Рэлея-Джинса в гл. III

чество движения определяется произведением массы молекулы на ее скорость, а в излучении количество движения равно произведению элементарного кванта действия на частоту, деленному на скорость света.

Если лучистая энергия в единице объема определяется *спектральным разложением*:

$$\eta = \int u_\nu d\nu, \quad (129)$$

то *удельная плотность излучения* u_ν , как функция частоты и температуры, определяется законом Планка:

$$u_\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (130)$$

Здесь c обозначает скорость света, T — абсолютную температуру, k — постоянную Больцмана, которая, будучи умножена на $\frac{3}{2} T$, выражает среднюю кинетическую энергию одноатомной молекулы при температуре T ¹. Мы упомянем только вскользь, что произведение из u_ν на $\frac{c}{4}$ представляет так называемую *удельную испускательную способность*² черного тела в спектральном промежутке от ν до $\nu + d\nu$ при температуре T .

¹ Постоянная Больцмана k представляет универсальный коэффициент пропорциональности между энтропией S и натуральным логарифмом статистической вероятности W^* ; именно:

$$S = k \ln W^* ;$$

численное значение постоянной Больцмана $1,372 \cdot 10^{-16} \frac{\text{эрг.}}{\text{град.}}$.

² Под *испускательной способностью* черного тела понимают энергию, излученную единицей поверхности тела в единицу времени. Если эту способность разложить спектрально, т. е. положить равной $K_\nu d\nu$, то, умножив уравнение (130) на $\frac{c}{4}$ найдем:

$$K_\nu = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Если *испускательную способность* рассчитывать не на интервал частот, а на интервал длин волн (от λ до $\lambda + d\lambda$), то из последнего уравнения,

С другой стороны, все статистические соображения кинетической теории газов опираются на понятие *статистической вероятности данного распределения состояний* частиц. Под этой последней в смысле теории соединений понимают *число комплексов*, которыми может быть осуществлено данное распределение. Будем рассматривать совокупность из N индивидуумов и распределим возможные для этих индивидуумов состояния в некоторый ряд (сначала ограниченный совершенно произвольно); этот ряд представим себе нумерованным. Пусть N_1 — число индивидуумов в первом состоянии, N_2 — число их во втором и, вообще, N_i — число их в i -ом состоянии. Должно быть:

$$\sum_i N_i = N. \quad (131)$$

Новая комплексия получается тогда, когда два индивидуума, находящиеся в *разных* состояниях, меняются ролями; наоборот, при перестановке двух индивидуумов *в одном и том же* состоянии *новой комплексии не получается*. Будем, например, отличать два состояния при трех индивидуумах (a, b, c); тогда для распределения состояний:

$$N_1 = 2; N_2 = 1$$

пользуясь соотношением $c = \lambda$, легко получить известную формулу Планка:

$$K_\lambda = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{ch}{k\lambda T}} - 1}.$$

Для малых значений λT получается формула Вина, годная в ультрафиолетовой области или при низких температурах:

$$K_\lambda = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} e^{-\frac{ch}{k\lambda T}}.$$

Наоборот, при больших λT получается закон Рэлея-Джинса для инфракрасной области и высоких температур:

$$K_\lambda = \frac{2\pi c k T}{\lambda^4}.$$

Законы Вина и Рэлея были открыты до формулы Планка; они имеют лишь ограниченное значение (для определенных областей). Формула Планка — общая.

ВОЗМОЖНЫ *три комплексии* СОГЛАСНО СХЕМЕ:

первое состояние	второе состояние
<i>ab</i>	<i>c</i>
<i>ac</i>	<i>b</i>
<i>bc</i>	<i>a</i>

Точно так же имеются три комплексии для распределения $N_1 = 1, N_2 = 2$. Наоборот, для распределения $N_1 = 3, N_2 = 0$ возможна лишь одна комплексия, как и для распределения $N_1 = 0, N_2 = 3$.

Статистическая вероятность, представляющая всегда целое положительное число, определяется, очевидно, *числом перестановок*, которые можно сделать с N индивидуумами, причем *исключаются* все перестановки, соответствующие перемещению двух элементов в одном и том же состоянии. Совокупность всевозможных перестановок из N индивидуумов равна, как известно, $N!$ (словами: « N — факюльтет»), где символ $N!$ обозначает произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (N - 1) N$.

Число перестановок, осуществляющихся перемещением двух индивидуумов в первом состоянии, равно $N_1!$ и т. д. Поэтому статистическая вероятность данного распределения по состояниям получается, если мы $N!$ сперва разделим на $N_1!$, так как все комбинации, получающиеся при перестановке индивидуумов внутри первой подгруппы, представляют *одну* комплексию (а не $N_1!$ комплексий). Далее, делим на $N_2!$ и т. д. Обозначив статистическую вероятность через W^* , получим для нее выражение:

$$W^* = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_i! \dots} \quad (132)$$

Из представления о газе, состоящем из световых квантов, как показал в 1924 г. индусский физик Бозе¹, действительно можно вывести основную формулу Планка, соблюдая при этом следующие требования: во-первых, квантовому газу объема, равного единице², должно соответствовать пространство *импульсов*, состоящее из ячеек величины h^3 ³; во-вторых, нужно дать

¹ S. N. Bose, «Zs. f. Phys.», 26, 178, 1924, 27, 384, 1925.

² Энергия единичного объема равна плотности энергии.

³ Ср. сказанное в конце гл. III.

определение *статистической вероятности, отличное от классической*.

Проще всего показать разницу между классической статистикой и статистикой Бозе на примере, который мы рассмотрели выше, и который относился к двум состояниям и трем индивидуумам. В этом примере классическая статистика различала четыре различных распределения состояний, но с *разными „весами“*, если при m возможных комплексах (т. е. $W^* = m$) считать все m -кратным. В рассматриваемом случае эти четыре распределения следующие:

$$\begin{aligned} N_1 = 3, N_2 = 0 & \text{ с простым весом} \\ N_1 = 2, N_2 = 1 & \text{ » тройным »} \\ N_1 = 1, N_2 = 2 & \text{ » тройным »} \\ N_1 = 0, N_2 = 3 & \text{ » простым »} \end{aligned}$$

В противоположность классической статистике теория Бозе приписывает *всем* этим распределениям *единичный вес*. Все распределения индивидуумов по состояниям по Бозе *равновероятны* совершенно так же, как в классической статистике равновероятны все отдельные комплексы (например ab ; c или ac ; b или bc ; a). Поэтому в статистике Бозе вместо распределения индивидуумов по областям состояний нужно исходить из *распределения областей состояний или ячеек по различным возможностям их заполнения*. Если N индивидуумов распределены по Z состояниям, то в классической статистике распределение характеризуется Z числами $N_1, N_2, N_3, \dots, N_z$, указывающими, сколько индивидуумов находится в каждом состоянии. В статистике Бозе распределение определяется $(N+1)$ числами Z_0, Z_1, \dots, Z_j , показывающими сколько ячеек заполнено 0 индивидуумами, сколько 1, 2 и вообще j индивидуумами; при этом должно быть:

$$\sum_j Z_j = Z. \quad (133)$$

Статистическая вероятность по теории Бозе в отличие от классической выражается так:

$$W = \frac{Z!}{Z_0! Z_1! \dots Z_j!}. \quad (134)$$

Рассмотрим, например, в прежнем частном случае $N=3$, $Z=2$, то распределение, когда два индивидуума находятся в первом состоянии и один во втором, тогда по уравнению (132) классическая вероятность (совпадающая с «весом») равна:

$$W^* = \frac{3!}{2!1!} = 3.$$

Наоборот, по уравнению (134) вероятность Бозе получится так: в рассматриваемом распределении ни одна клетка не заключает 0 индивидуумов, одна заключает 1, одна 2 и ни одна 3; поэтому

$$W = \frac{2!}{1!1!} = 2.$$

Аналогия между уравнениями (132) и (134), а также между уравнениями (131) и (133) оправдывает перенос формул, полученных в классической статистике, на статистику Бозе; но при этом все величины, относящиеся в классической статистике к индивидууму в i -том состоянии, в статистике Бозе относятся к ячейке, заполненной i индивидуумами. Одна из основных формул классической кинетической теории тепла выражает следующее положение¹; если количество энергии E распределено между индивидуумами при температуре T и ϵ_i представляет энергию одного из индивидуумов в i -том состоянии, то в состоянии статистического равновесия системы имеет место соотношение:

$$\frac{E}{N} = \frac{\sum \epsilon_i e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}}}{\sum e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}}}. \quad (135)$$

Желая применить эту формулу к газу, состоящему из световых квантов, мы сперва рассмотрим в этом газе только те кванты, частоты которых лежат в малом интервале от ν до $\nu + d\nu$. По сказанному выше мы должны в статистике Бозе понимать под ϵ_i энергию, соответствующую ячейке, занятой i квантами частоты ν :

¹ См., например, книгу автора «Введение в теоретическую физику» 3 и 4-е изд., Berlin — Leipzig, 1923 (1924), т. II, § 132, уравнение (16) и § 142, уравнение (2).

откуда получается:

$$\varepsilon_i = i\hbar\nu \quad (136)$$

$$\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} = \sum_{n=0}^{n=Z} e^{-\frac{n\hbar\nu}{kT}}.$$

Известная формула суммы бесконечной геометрической прогрессии (в случае $|y| < 1$) дает:

$$1 + y + y^2 + y^3 + \dots = \frac{1}{1-y}.$$

Так как этот ряд быстро сходится¹ и поэтому верхнюю границу суммы можно принять равной бесконечности вместо Z , то получим:

$$\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\nu}{kT}}}. \quad (137)$$

Взяв частную производную от этого выражения по температуре, умножая затем обе стороны на kT^2 , находим:

$$\sum \varepsilon_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} = \frac{\hbar\nu e^{-\frac{\hbar\nu}{kT}}}{\left(1 - e^{-\frac{\hbar\nu}{kT}}\right)^2}. \quad (138)$$

Разделим теперь уравнение (138) на уравнение (137). По уравнению (135) левая часть должна представлять *среднее значение энергии*, соответствующей отдельной ячейке. Обозначив эту величину через $\bar{\varepsilon}$, найдем:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\hbar\nu}{e^{\frac{\hbar\nu}{kT}} - 1}. \quad (139)$$

¹ Отношение $\frac{\hbar\nu}{kT}$ для видимого света при комнатной температуре имеет порядок величины 50.

Рассмотрим далее *пространство импульсов*, которые мы должны сопоставить *всему* газу из световых квантов (состоящему из квантов *всех* частот) согласно соотношению:

$$p = \frac{h\nu}{c}.$$

Все ячейки пространства импульсов, соответствующие частоте между ν и $\nu + d\nu$, должны лежать в слое между двумя сферическими поверхностями радиусов:

$$r_1 = \frac{h}{c}\nu, \quad r_2 = \frac{h}{c}(\nu + d\nu).$$

Объем этого слоя равен:

$$4\pi r_1^2 (r_2 - r_1) \text{ или } 4\pi \frac{h^2}{c^3} \nu^2 d\nu.$$

Так как по нашему допущению отдельная ячейка этого пространства имеет объем h^3 , то *число ячеек* в этом слое равно $Z d\nu$, где

$$Z = \frac{4\pi\nu^2}{c^3}. \quad (140)$$

С другой стороны, у световых квантов (вследствие поперечности световых волн) следует различать два *взаимно перпендикулярных состояния поляризации*; поэтому

$$2Z\bar{\epsilon} = u, \quad (141)$$

и, таким образом, действительно получается формула Планка (уравнение 130). Следует указать, что формулу Планка можно получить и из принципа Рэлея-Джинса, если каждому собственному колебанию приписать энергию, являющуюся целым кратным элементом энергии $h\nu$ ¹. Если мы обозначим это целое число

¹ См., например, вывод, данный автором этой книги в 1921 г. в первом издании «Введения в теоретическую физику». (Уравнение (6), § 106 в 1-м изд. уравнение (6), § 139 в 3 и 4-м изд.)

через n , то в статистике Бозе на место n -квантовых собственных колебаний становится ячейка пространства импульсов, занятая n световыми квантами.

Теория волн материи де-Бройля привела Эйнштейна¹ к мысли создать *теорию газов*, формулы которой получались бы из статистики Бозе таким же образом, как формулы прежней газовой теории получились из классической статистики. Отклонения эйнштейновой газовой теории от классической в существенных чертах заключается в том, что там, где классические формулы содержат выражение $e^{-\frac{\epsilon}{kT}}$, это выражение заменяется более сложным:

$$\frac{1}{Ve^{\frac{\epsilon}{kT}} - 1}, \quad (142)$$

где V является функцией температуры.

Отклонения, получающиеся на основании этой формулы, вообще говоря, не имеют значения. Они начинают проявляться лишь в области *очень низких температур*, при которых и «идеальный» газ начинает испытывать *вырождение*, не объяснимое с классической точки зрения. В последнее время газовая теория Эйнштейна отступила на задний план вследствие появления другой теории газов, созданной итальянским физиком Ферми на основе принципа Паули.

¹ A. Einstein, Sitz.-Ber. der. Berl. Akad., 1924, S. 261; 1925 S. 3, 18.

Глава четырнадцатая

СТАТИСТИКА ФЕРМИ

Принцип Паули дает *максимальные числа* заполнения электронных групп с различными квантовыми числами; представление о *волнах материи* для газа, заключенного в некотором резервуаре, приводит к необходимости *квантования энергии поступательного движения*; наконец, статистика Бозе выдвигает на передний план вопрос о *числах заполнения* различных ячеек; отсюда возникла мысль о применении принципа Паули и к *статистической теории газов*. Проводя эту идею, Ферми создал в 1926 г. свою теорию *вырождения газов*¹. Эта теория основана на допущении, что в газе может быть *не более одной молекулы* с заранее заданными значениями квантовых чисел.

Мы не будем обращать внимания на внутренние движения молекул и притом предположим, что они находятся в устойчивом (основном) состоянии²; тогда (по аналогии с соображениями гл. III) нужно приписать каждой молекуле *три квантовых числа* (n_1, n_2, n_3), соответствующих трем степеням свободы; энергия молекулы должна быть равна:

$$\epsilon_n = h\nu(n_1 + n_2 + n_3) = n h\nu, \quad (143)$$

где ν обозначает некоторую основную частоту. Прежде всего возникает вопрос, сколькими комбинациями может быть осуществлено значение энергии $n h\nu$ у одной молекулы. Обозначим это число комбинаций через s . Оно, очевидно, равно числу решений, которое имеет диофантово уравнение:

$$n_1 + n_2 + n_3 = n,$$

¹ E. Fermi, «Zs. f. Phys.», 36. 902, 1926.

² Кроме того нужно допустить, что основное состояние нельзя разложить магнитным полем.

причем n_1, n_2, n_3, \dots — целые числа и не могут принимать отрицательных значений. Для нахождения числа решений примем в расчет, что при заданных произвольных значениях n_1 и n_2 число n_3 имеет уже определенное значение. Так как число n_3 может равняться нулю, но не может быть отрицательным, то при значении $n_1 = 0$, n_3 может принимать $(n + 1)$ значение, при $n = 1$, n значений; при $n_1 = (n - 1)$ число n_3 может иметь два значения (именно: $n_3 = 1$ и $n_3 = 0$); наконец, при $n_1 = n$ возможно лишь одно значение n_3 ($n_3 = 0$). Мы находим поэтому:

$$s = (n + 1) + n + (n - 1) + \dots + 2 + 1$$

или, так как сумма всех положительных целых чисел от 1 до x равна $\frac{x(x + 1)}{2}$, то

$$s = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}. \quad (144)$$

Поэтому согласно допущению Ферми в газе может быть не более 1 молекулы с энергией . . . 0

»	»	3	»	»	»	. . .	$h\nu$
»	»	6	»	»	»	. . .	$2 h\nu$
»	»	10	»	»	»	. . .	$3 h\nu$
»	»	15	»	»	»	. . .	$4 h\nu$

Энергия газа, состоящего, например, из небольшого числа в 40 молекул, не может быть поэтому меньше

$$1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 15 \cdot 4 + 5 \cdot 5,$$

т. е. меньше 130 элементов $h\nu$. Неизбежным следствием переноса принципа Паули в область статистики является то, что и при абсолютном нуле газ должен обладать энергией. Распределению энергии молекул обладает при этом чем-то вроде слоистого строения — по аналогии со слоистой структурой системы планетных электронов в атомах¹.

Определенное распределение состояний опять задается числами N_i , показывающими, сколько молекул обладают энергией $i h\nu$.

¹ Полным числам заполнения электронных групп 2, 8, 18, 32 и т. д. соответствуют в статистике Ферми числа 1, 3, 6, 10, 15 и т. д.

Но в противоположность классической статистике числа N в теории Ферми ограничены условием, что

$$N_i < Q_i, \quad (145)$$

где положено для сокращения

$$\frac{(i+1)(i+2)}{2} = Q_i. \quad (146)$$

Если в газе имеется N_i молекул с общим квантовым числом i (т. е. с энергией $i\hbar\nu$), а максимальное число таких молекул равно Q_i , то для статистической вероятности по элементарной формуле теории соединений получится (поскольку мы рассматриваем лишь молекулы с квантовым числом i)¹:

$$\left(\frac{Q_i}{N_i}\right).$$

Для общего распределения получается поэтому статистическая вероятность в смысле Ферми (обозначим ее через W_p):

$$W_p = \left(\frac{Q_0}{N_0}\right) \left(\frac{Q_1}{N_1}\right) \left(\frac{Q_2}{N_2}\right) \dots \left(\frac{Q_i}{N_i}\right) = \prod \left(\frac{Q_i}{N_i}\right). \quad (147)$$

На основании этой формулы вычисления производятся аналогично тому, как это имело место в классической статистике или статистике Бозе. Получающиеся при этом результаты довольно сложны, но они принимают более простые формы в обоих крайних случаях слабого и сильного вырождения. Уравнение состояния идеального газа гласит, как известно, по классической теории:

$$p = NkT \quad (148)$$

где p — давление и N — число молекул в единице объема. Теория Ферми приводит в случае слабого вырождения к следующему уравнению состояния:

$$p = NkT \left(1 + \frac{1}{16} \frac{h^3 N}{(\pi mkT)^{3/2}}\right), \quad (149)$$

¹ Как известно:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}.$$

где m — масса молекулы. По этой формуле давление оказывается больше, чем в классической теории ¹. Для гелия при 5° абс. и давлении в 10 ат отклонение равнялось бы приблизительно 15%.

В крайнем случае *сильного вырождения* теория Ферми приводит к уравнению состояния:

$$p = \frac{1}{20} \left(\frac{6}{\pi} \right)^{3/2} \frac{h^2 N^{5/2}}{m} + \frac{2^{1/2} \pi^{5/2}}{3^{3/2}} \cdot \frac{m N^{4/2} k^2 T^2}{h^2} + \dots \quad (150)$$

Из этой формулы вытекает, что и при $T=0$ газ имеет определенное давление, т. е. существует не только энергия абсолютного нуля, но и *давление абсолютного нуля*. Замечательна также формула, получаемая Ферми в случае сильного вырождения для *удельной теплоты* (при постоянном объеме), именно:

$$c_v = \frac{2^{1/2} \pi^{5/2}}{3^{3/2}} \cdot \frac{mk^2 T}{h^2 N^{3/2}} + \dots \quad (151)$$

¹ Отклонения теории газов по Ферми от классической и от эйнштейновой, грубо говоря, описываются тем, что вместо классического выражения:

$$e^{-\frac{\epsilon}{kT}},$$

в теории Эйнштейна (ср. формулу (142)) фигурирует выражение

$$\frac{1}{Be^{\frac{\epsilon}{kT}} - 1},$$

а у Ферми

$$\frac{1}{Ae^{\frac{\epsilon}{kT}} + 1}.$$

B представляет функцию температуры, точно так же и A ; при этом, как показали Гейтлер и Паули

$$\ln A = -\frac{\mu}{kT},$$

где μ — термодинамический потенциал Гиббса, рассчитанный на единицу массы электронов.

Удельная теплота *исчезает* при температуре абсолютного нуля, тогда как при других температурах она пропорциональна абсолютной температуре ¹.

Весьма существенной областью применения статистики Ферми, как показал Зоммерфельд ² в 1927 г., явилась *электронная теория металлов*.

Представление о том, что содержащиеся в металле и обуславливающие его электро- и теплопроводность свободные электроны ведут себя как газ, наталкивается с точки зрения классической теории на непреодолимые трудности (хотя это представление и кажется очень естественным). По классической теории, каждый электрон, как и одноатомная молекула, должен обладать при температуре T кинетической энергией, равной $\frac{3}{2} kT$. Свободные электроны должны были бы поэтому играть *существенную роль в удельной теплоемкости металлов*; но этот вывод классической теории находится в *резком противоречии с опытом*.

Как показал Зоммерфельд, это затруднение совершенно отпадает, если применять к свободным электронам статистику Ферми. Именно благодаря тому, что масса электрона приблизительно в 1800 раз меньше массы легчайших атомов, *электронный газ* по статистике Ферми должен быть уже при комнатной температуре в состоянии *полного вырождения*. Действительно, в случае слабого вырождения из уравнения (149) следует, что при одинаковой температуре и одинаковом числе частиц поправочный член для электронного газа в несколько сот тысяч раз больше, чем для гелия. В состоянии сильного вырождения по уравнению (151) удельная теплота электронного газа пропорциональна массе и поэтому благодаря ничтожной массе

¹ Теория газов по Ферми дает, между прочим, значение *абсолютной энтропии газа*, данков Штерном и Тетроде, именно:

$$s = Nk \left(\frac{3}{2} \ln T - \ln N + \ln \frac{(2\pi m)^{3/2} k^{3/2} e^{5/2}}{h^3} \right)$$

где e — основание натуральных логарифмов.

² A. Sommerfeld, Zur Elektronentheorie der Metalle «Naturwss.», 15, 825, 1927; «Zs. f. Phys.», 47, 1. 1928.

электронов совершенно незаметна сравнительно с удельной теплотой самого металла ¹.

Применение статистики Ферми к электронному газу, как показал Зоммерфельд, приводит прежде всего к известному закону Видемана-Франца, по которому отношение теплопроводности металла к его электропроводности пропорционально абсолютной температуре. Численный коэффициент, фигурирующий в этом законе в первоначальной электронной теории металлов, равнялся 3, позднее более точный подсчет по классической статистике дал величину 2; по статистике Ферми получается $\frac{1}{3} \pi^2$, т. е. приблизительно 3,3. Последнее из трех чисел лучше всего согласуется с данными опыта. Зоммерфельд успешно применил статистику Ферми также и к вычислению *контактных потенциалов*, эффекта Томсона и эффекта Пельтье ². Он показал, что порядок величины и зависимость от температуры этих эффектов получаются по статистике Ферми правильно. Особенным успехом новой теории следует считать то, что в ней делаются излишними специальные гипотезы относительно взаимодействия между свободными электронами и атомными остатками металлов.

¹ По классической статистике доля свободных электронов в удельной теплоемкости металлов была бы $\frac{3}{2}R$ (где R —газовая постоянная, рассчитанная на моль); по статистике Ферми эта доля при комнатной температуре приблизительно равна $\frac{R}{100}$.

² Как известно, эффект Пельтье состоит в том, что при пропускании тока через цепь, состоящую из двух металлов, на одном спаяе возникает нагревание, а на другом—охлаждение. Кельвин (В. Томсон) показал, что в однородном металле возникают термические эффекты, если ток проходит между точками различной температуры.

ДЕЙСТВИЕ НА АТОМЫ СВЕТОВЫХ ВОЛН И ВОЛН МАТЕРИИ

К важнейшим применениям волновой механики, возникшим уже вскоре после ее основания, относятся задачи, возникающие при рассмотрении *взаимодействия между атомами и световыми волнами*. Подходящим для разрешения задач подобного рода явилось обобщение уравнения Шредингера, в которое явно входит зависимость основного скаляра поля от времени. Это уравнение, которое мы сперва приведем без доказательства¹, имеет вид:

$$\Delta S - \frac{4\pi im}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} VS = 0. \quad (152)$$

В этой форме волновое уравнение было применено Шредингером прежде всего к задаче о дисперсии².

Если атом помещен в *однородное синхронно колеблющееся электрическое переменное поле* — таковым можно считать поле *линейно-поляризованной монохроматической световой волны*, — то *потенциальная энергия* V_0 невозмущенного атома благодаря действию поля оказывается увеличенной на член V^* , который можно выразить так:

$$V^* = -F \cos(2\pi\nu t) \sum e_i z_i.$$

Здесь F — напряжение электрического поля, ν — частота колебаний световой волны, а e_i и z_i — заряды и координаты z частиц атома; предполагается, что плоскость колебаний световой волны выбрана за координатную плоскость xu ; таким

¹ Доказательство см. в гл. XVIII.

² E. Schrödinger, «Ann. d. Phys.», (4), 81, 139, 1926; также «Abhandlungen zur Wellenmechanik», Leipzig (Barth) 1927.

образом $\Sigma e_i z_i$ представляет электрический момент невозмущенного атома. Поэтому уравнение, являющееся основным в теории дисперсии, пишется в следующей форме:

$$\Delta S - \frac{8\pi^2 m}{h^2} [V_0 - F \cos(2\pi\nu t) \Sigma e_i z_i] S - \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (153)$$

Для $F = 0$ это уравнение переходит в уравнение для невозмущенного атома, характеристические числа которого (следовательно, уровни энергии) можно считать известными (также и фундаментальные функции). Физическая задача о дисперсии оказывается, таким образом, сведенной к математической задаче, заключающейся в нахождении общих значений характеристических чисел и фундаментальных функций, если они известны для частного случая $F = 0$. На этой чисто математической задаче мы здесь останавливаться не будем.

Шредингер пользуется допущением, применяемым им и в других случаях, что квадрат абсолютной величины скаляра поля или, точнее, произведение комплексной величины S на сопряженную с ней S^* представляет не что иное, как *плотность электрических зарядов* (ср. гл. XI). Плотность зарядов оказывается, таким образом, известной, если известны фундаментальные функции, а вместе с ней можно вычислить и *результатирующий добавочный электрический момент*; колебания этого момента обуславливают *вторичное излучение*, вызванное действием первичной падающей световой волны. Следствием совместного действия вторичного и первичного излучения как раз и является то, что скорость волны *кажется* измененной, причем это изменение зависит от частоты; таким образом и возникает известное явление дисперсии.

Теория Шредингера дает следующее значение для добавочного электрического момента (если атом, на который падает волна, находился в k -ом состоянии):

$$M = a_{kk} + 2F \cos(2\pi\nu t) \sum_n \frac{(E_n - E_k) a_{kn} b_{kn}}{(E_n - E_k)^2 - h^2 \nu^2}. \quad (154)$$

Здесь величина a_{kk} является мерой вероятности пребывания атома в k -ом состоянии; эта величина не зависит от времени, поэтому для дисперсии имеет значение лишь второй член пра-

вой части уравнения (154); $a_{k,n}$ и $b_{k,n}$ представляют величины, математического значения которых мы обсуждать не будем; существенно только отметить, что они определяют *вероятность спонтанного перехода* между k -м и n -м состояниями.

Уравнение (154) ясно показывает невозможность сохранения так называемой классической теории дисперсии, согласно которой рассеяние света определяли числа колебаний и оборотов (при движении вокруг ядра) электронов. Из уравнения (154) следует, что, вообще говоря, вторичное излучение зависит вовсе не от этих классических частот, а от *спектральных частот атома*, подверженного действию первичного излучения; при этом играют роль *все возможные* с квантовой точки зрения, частоты, а действительное их появление вовсе не имеет значения. В существенных чертах этот вывод был получен в 1921 г. Ладенбургом¹, который также обнаружил зависимость числителя дисперсионной формулы от вероятностей перехода. Однако Ладенбург принял во внимание лишь те члены дисперсионной формулы, для которых $n > k$, следовательно, эти члены соответствуют поглощению квантов света. Впервые Крамерс² ввел также и так называемые *отрицательные члены*, т. е. такие, для которых $n < k$ и, следовательно, имеет место испускание. Таким образом Крамерс получил полную формулу дисперсии, точное обоснование которой было дано лишь квантовой и волновой механикой.

Из рассмотрения формулы дисперсии Крамерс и Гейзенберг³ сделали вывод, что во *вторичном излучении* могут содержаться и *комбинационные частоты*

$$\nu = \nu(n, k),$$

где $\nu(n, k)$ обозначает одну из собственных спектральных частот⁴. Действительно, подобный случай, повидимому, имеет место в замечательном явлении, открытом в 1928 г. индийским физиком Раманом и носящем в настоящее время его имя.

¹ R. Ladenburg, «Zs. f. Phys.», 4, 451, 1921.

² H. Крамерс, «Natur», 113, 673, 1924.

³ H. A. Крамерс und W. Heisenberg, «Zs. f. Phys.», 31, 681 1925.

⁴ До Крамерса и Гейзенберга на эту возможность указал Смелаль (A. Smekal), «Naturwiss.», 11, 873, 1923.

Рама¹ пропускал свет кварцевой ртутной лампы через разные жидкости и в спектре рассеянного света обнаружил резкие линии, длины волн которых были или больше или меньше длин волн первичного излучения. Кроме того ему удалось установить, что разности частот не зависят от первичной частоты и в случае бензола одна из наблюдаемых разностей частот равна известной из других опытов собственной инфракрасной частоте молекулы бензола.

На основании формулы дисперсии резонанса следует ожидать тогда, когда частота первичного света совпадает с одной из спектральных частот атома. Однако энергия при резонансе не делается бесконечной (вопреки тому, что дает формула), так как уравнение (154) лишь приближенное и при его выводе сделаны упрощения, которые перестают быть справедливыми в случае полного резонанса. Следует еще отметить, что вместе с заданием дополнительного электрического момента атома можно определить рассчитанную на один атом работу электрического поля волны; она равна произведению момента на напряжение поля и на косинус угла между этими векторами. Эта работа представляет не что иное как энергию, которую отдельный атом поглощает из поля.

Вентцель² и Бек³ показали, что теорию Шредингера дисперсии можно применить и к *фотоэлектрическому эффекту*. Эта возможность обусловлена тем, что, как было указано выше (гл. VII), *характеристические числа* атома образуют, вообще говоря, *две области*: одну *прерывную* (дискретные значения) и другую — *непрерывную*. Первой соответствуют *периодические* движения электронов в атоме, второй — такие *аперодические* движения, благодаря которым электрон *удаляется* из атома. В атоме водорода дискретная область значений соответствует отрицательной энергии и эллиптическим орбитам, сплошная же область — положительной энергии и гиперболическим орбитам. Таким образом если в частном случае (при достаточно боль-

¹ C. V. Raman and H. P. Krishna, Nature 121, 501, 1928 «Indian Journ. of Physics» 2, 1, 1928 и 2, 396, 1928. Независимо от Рамана и одновременно с ним этот же эффект был найден Л. Мандельштамом и Г. Ландсбергом в Москве. (Прим. перев.)

² G. Wentzel, «Zs. f. Phys.», 40, 574, 1926; 41, 828, 1927.

³ G. Beck, «Zs. f. Phys.», 41, 443, 1927.

ной частоте) дисперсионное уравнение Шредингера дает характеристическое число из непрерывной области, то при этом оно описывает освобождение электрона из атома, т. е. фотоэлектрический эффект. Как показывает теоретический вывод, из атома при этом выходит *шарообразная волна материи*, которая в смысле статистической интерпретации Борна определяет вероятность испускания фотоэлектрона в различных направлениях.

Расчеты Вентцеля и Бека, на которых мы останавливаться не будем, приводят прежде всего к соотношению Эйнштейна, установленному уже гораздо раньше, что кинетическая энергия *фотоэлектрона* равна сумме энергий кванта $h\nu$ и одного из дискретных значений энергии атома. Далее, как показывают расчеты в полном согласии с опытом, испускание электронов должно иметь *максимум* в направлении *электрического* вектора световой волны; в других направлениях, образующих с электрическим вектором углы θ , интенсивность оказывается пропорциональной $\cos^2 \theta$.

Также и *выход* фотоэлектронов, т. е. число вылетающих в единицу времени фотоэлектронов, можно рассчитать на основании дисперсионной теории Шредингера; тем самым определяется и *коэффициент поглощения* света заданной первичной частоты. Подсчеты показывают, что *выход* и *поглощение* зависят не только от частоты и порядкового номера атома, но и от побочного квантового числа ¹ той электронной подгруппы, откуда происходит освобождение электронов. Благодаря сложности этих расчетов фотоэффекта их удается довести до конца лишь в частном случае, когда можно пренебречь взаимодействием между освобождаемым электроном и другими электронами того же атома, т. е. в случае так называемой водородоподобности ². Этот случай имеет прежде всего место для электронов, *близких к ядру* ³, так что экспериментального подтверждения теории нужно искать прежде всего при фотоэффекте в рентгеновых лучах. Многочисленные следствия теории фотоэффекта, основанной на волновой механике, все хорошо согласуются с результатами экспериментальных исследований.

¹ Ср. гл. XII.

² Так как атом водорода содержит лишь один электрон.

³ Это прежде всего *одноквантовые K-электроны* и *двуквантовые L-электроны*.

С фотоэффектом тесно связано замечательное явление, открытое в 1925 г. Оже ¹. Он нашел, что при известных условиях атом может испускать под действием света *одновременно два электрона*. Теоретически это явление можно понять, как *три процесса, следующие один за другим*. Первый представляет обычный фотоэффект, т. е. освобождение одного из внутренних электронов квантом первичного рентгеновского излучения. Пусть, например, этот электрон принадлежит к самой внутренней электронной группе — одноквантовой К-группе. Освобождение этим электроном *места* дает возможность электрону с более высоким квантовым числом перейти в одноквантовое состояние, т. е. упасть на более глубокий уровень энергии (до удаления первого электрона эта возможность была закрыта благодаря принципу Паули). *Освобождающаяся* при этом энергия E' может либо обратиться во *вторичный квант* $h\nu'$, что обозначает испускание рентгеновской спектральной *линии флуоресценции*, либо эта энергия может быть затрачена на освобождение другого электрона, энергия связи которого меньше E' . Этот электрон покидает атом в качестве *второго фотоэлектрона*; скорость его такова, что квадрат ее, умноженный на половину массы, равен разности E' и энергии связи.

С точки зрения волновой механики, эффектом Оже занимались Вентцель ² и Фюс ³. Они показали, что из атома, из которого вырван электрон, выходит *шаровая волна материи*, которая по Борну определяет *вероятность испускания электрона* Оже. С вычисленной, таким образом, вероятностью ⁴ можно сравнить известную из других данных вероятность превращения энергии E' в квант света. Полученное, таким образом, отношение вероятностей *квантовых переходов, сопровождающихся излучением и происходящих без излучения*, удовлетворительно совпадает с отношением, которое получается из опытов Оже для выхода флуоресценции при поглощении рентгеновых лучей.

Волновая механика ставит в связь дисперсию с открытым в 1923 г. эффектом Комптона. Последний, как известно, состоит

¹ P. Auger, «Journ. de Phys.», 6, 25, 1925; 6, 183, 1926.

² G. Wentzel, «Zs. f. Phys.», 43, 524, 1927.

³ E. Fues, «Zs. f. Phys.», 43, 726, 1927.

⁴ В существенных чертах эта возможность определяется квадратом абсолютной величины предрингеровского скаляра поля.

в том, что при *рассеянии* монохроматического рентгеновского излучения твердыми телами в спектре рассеяния кроме первоначальной линии наблюдается еще *смещенная линия*, длина волны которой больше на величину

$$\Delta\lambda = 2\lambda_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

При этом φ представляет угол рассеяния, а λ_0 — *универсальную постоянную*, равную

$$0,0243 \text{ \AA} (= 2,43 \cdot 10^{-10}) \text{ см.}$$

Частота, соответствующая этой постоянной, будучи умножена на \hbar , представляет внутреннюю энергию электрона, mc^2 ¹. Кроме того опыт показывает, что в каждом отдельном случае, когда рассеивается квант света, из рассеивающего атома вылетает так называемый *электрон отдачи*; скорость его такова, что для каждого *отдельного акта рассеяния* соблюдается *закон сохранения энергии и закон сохранения количества движения* (предполагается, конечно, что квант света обладает энергией $h\nu$ и количеством движения $\frac{h\nu}{c}$).

На почве гипотезы о квантах света Комптон² и Дебаю³ удалось правильно вычислить изменение длины волны, имеющее место при эффекте Комптона; некоторые дополнительные допущения позволили вычислить и зависимость интенсивности от угла рассеяния. С точки зрения квантовой механики Комpton-эффект был прежде всего исследован Дираком⁴, а затем по методу Шредингера Гордоном⁵.

Рассматривая задачу о свободном *электроне под действием электромагнитной волны*, оба исследователя получили для распределения интенсивности по углам соотношения, которые еще лучше соответствуют опыту, чем полученные раньше. Вент-

¹ Изменение длины волны, таким образом, не зависит от первичной длины волны.

² A. H. Compton, «Phys. Rev.», 21, 483, 1923.

³ P. Debye, «Phys. Rev.», 24, 161, 1923.

⁴ P. A. M. Dirac, «Proc. Roy. Soc. London», (A), 111, 405, 1926.

⁵ W. Gordon, «Za. f. Phys.», 40, 117, 1926.

цель¹ ближе рассмотрел процесс рассеяния, не считая рассеивающий электрон оvoidным, а учитывая его принадлежность к атому. Вентцель представляет себе процесс рассеяния, обуславливающий эффект Комптона, так: поглощение атомом кванта света $h\nu$ сопровождается затем испусканием кванта $h\nu'$ меньшей частоты, так что в результате обоих процессов электрон оказывается поднятым на более высокий уровень энергии. Если этот уровень окажется принадлежащим к непрерывной области значений энергии, то электрон покинет атом в качестве *электрона отдачи*. Совокупность значений ν' (все меньше первичной частоты) дает, с другой стороны, *непрерывный спектр*, так называемое *некогерентное рассеяние*; на основании теории дисперсии Шредингера Вентцелю удалось показать, что это рассеяние имеет резкий максимум *интенсивности*, когда действие кванта света на рассеивающий электрон начинает превалировать над притяжением соответствующего атомного ядра. Максимум интенсивности представляет из себя наблюдаемую «сдвинутую» линию, длина волны которой получается та же, что и в старой теории и в согласии с опытными данными. Теория Вентцеля дает в удовлетворительном согласии с опытом также распределение интенсивности рассеянного света, далее отношение интенсивности сдвинутой и несдвинутой линии², зависящее от атомного номера, наконец, общую зависимость интенсивности от особых свойств рассеивающих атомов.

Теория Шредингера дает, наконец, возможность рассматривать *столкновения частиц материи*, т. е. такие процессы, которые по существу основаны на *действии волн материи на атомы*. К этой области явлений относятся уже упомянутые выше (гл. I) *электронные удары*, которые были открыты Франком и Гердом, далее *рассеяние электронов и α -частиц при прохождении через материю* (газы или металлические фольги), наконец, *превращение энергии катодных лучей в энергию рентгеновых лучей*, имеющее место в рентгеновых трубках.

Задача об *электронном ударе* была разрешена Борном³, который рассматривал систему, образованную из N -электронов атома

¹ G. Wentzel, «Zs. f. Phys.», 43, 1, 779, 1927.

² Точнее говоря, речь идет об отношении интенсивностей всего «сдвинутого» излучения к несдвинутому.

³ M. Born, «Zs. f. Phys.», 37, 863, 1926; 38, 803, 1926.

и сталкивающегося с ним электрона, как $(N+1)$ -й частицы. Характеристические числа и фундаментальные функции системы из N -электронов предполагаются известными. Получающаяся, таким образом, математическая задача включает *пограничное условие*, которое требует, чтобы фундаментальные функции дифференциального уравнения для $(N+1)$ частицы по отношению к координатам ударяющего электрона изображали бы в бесконечности, плоскую волну материи; напротив, по отношению к координатам N -электронов должна получаться замкнутая система. Потенциальную энергию Борн полагает равной сумме энергии невозмущенного атома и энергии взаимодействия. Второе слагаемое принимается малым по сравнению с первым, так что задачу можно решить по обычным методам теории возмущений.

Решение, которое, таким образом, получает Борн, описывает как *упругое отражение* сталкивающегося электрона (при котором кинетическая энергия не меняется), так и *неупругие* отражения, когда налетающий на атом электрон теряет часть энергии; эта последняя равна умноженной на h собственной частоте ударяемого атома; энергия эта делает атом способным испустить соответствующую спектральную частоту. Решение, полученное Борном, показывает также, что благодаря удару один из электронов атома может перейти на уровень энергии, соответствующий непрерывной области, а это представляет *ионизацию электронным ударом*. Наконец, теория Борна позволяет вычислить относительное число упругих и неупругих ударов. *Распределение по направлениям* при рассеянии электронов и α -частиц материей было исследовано с точки зрения волновой механики Вентцелем¹ и Гордоном². По волновой механике получается в точности Резерфордское *распределение*, которое уже много раньше было получено Резерфордом на почве классических методов.

¹ G. Wentzel, «Phys. Zs.», 29, 321, 1928.

² W. Gordon, «Zs. f. Phys.», 48, 180, 1928.

РЕЗОНАНС В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Так как волновая механика связывает со всеми частицами материи колебательные процессы, то казалось естественным перенести в область физики атома старые выводы общего учения о колебаниях, которые относятся к взаимодействию *связанных колебаний*. Если два колебания *одинаковой частоты* связаны между собой, то известно (например, в случае связанных маятников), что возникающие *биения* вызывают *смещение* чисел колебаний и благодаря этому возникают *два различных колебания*, из которых одно имеет *большее* число колебаний, а другое — *меньшее* число колебаний, чем то, которое было при отдельных колебаниях. Подобного явления согласно волновой механике следует ожидать во всех случаях, когда в процессах участвуют *две одинаковые частицы материи*¹, между которыми действуют какие-либо *силы*.

Наиболее простой случай подобного рода имеет место в *нейтральном атоме гелия*, в котором ядро окружено двумя взаимно отталкивающимися электронами. По сказанному выше здесь следует ожидать вместо одной системы термов, которая имеет место, например, в атоме водорода, содержащем лишь один электрон, *двух систем термов*, сдвинутых относительно друг друга. Действительно, это и обнаруживает спектроскопическое исследование. В гелии наблюдаются две различные системы термов, которые даже сперва приписывали различным модификациям гелия — *парагелию и ортогелию*². Долгое время переходы между этими двумя системами термов считались невозможными; только в 1922 г. Лаймэн открыл слабую спектральную линию, обусловленную таким переходом.

¹ Равным массам по уравнению (16) соответствуют и равные частоты.

² Система термов парагелия состоит из одиночников и обладает основным состоянием, в котором оба электрона являются одноквантовыми *s*-электронами. У ортогелия система термов дублетная с двухквантовым основным термом.

Гейзенберг¹ произвел точные подсчеты, пользуясь квантовой механикой, и обобщил их на случай произвольного числа электронов; эти подсчеты показывают, что *связь между электронами вызывает распадение системы уровней энергии на определенное число частичных систем, между которыми могут возникать лишь слабые комбинационные линии.* Эти комбинации вовсе исчезают в том *предельном случае*, когда можно пренебречь собственным вращением электрона. Таким образом существование слабой комбинационной линии, открытой Лаймэном, является доказательством *собственного вращения электрона.*

Так как квантовый резонанс является совершенно общим следствием связи двух одинаковых частиц материи, то Гейзенберг был совершенно прав, предположив наличие резонанса в случае *молекул, состоящих из двух одинаковых атомов.* Этим способом Гейзенбергу удалось очень просто объяснить казавшийся прежде совершенно загадочным факт из области исследования молекулярных спектров. Именно для молекулярных спектров характерно существование так называемых *полос, состоящих из отдельных линий, частоты которых группируются около некоторой основной частоты; при этом частоты отдельных линий вычисляются по формулам, которые содержат основную частоту и некоторые другие постоянные, причем для разных линий некоторое переменное число пробегает ряд целых чисел 1, 2, 3, 4 и т. д.* У молекул, состоящих из двух одинаковых атомов, возникает при этом удивительная аномалия. Каждая вторая линия полосы в таких молекулах либо вовсе отсутствует, либо линии полосы попеременно слабые и яркие.

Это *чередование интенсивности* в полосатых спектрах, известное уже ранее, Гейзенберг истолковал как резонансный эффект. Он показал, что система термов, соответствующая фундаментальным функциям задачи о молекуле, распадается, как и в случае гелия, на две системы; линии же некоторой полосы попеременно соответствуют комбинациям *внутри* частичной системы и комбинациям *между термами двух систем.* Эти последние, как и в случае гелия, могут иметь место только в том случае, если связанные в молекуле ядра атомов обладают *собственным вращением*; при отсутствии такого вра-

¹ W. Heisenberg, «Zs. f. Phys.», 38, 411, 1926; 41, 239, 1927.

щения комбинации между системами должны были бы отсутствовать.

Квантовый резонанс дает, таким образом, не только объяснение чередования интенсивностей в спектрах, но и позволяет сделать некоторые выводы о структуре ядер. Наблюдаемое выпадение каждой второй линии в полосатых спектрах гелия и кислорода вполне отвечает теоретическим ожиданиям; в спектрах же водорода и азота комбинации между системами существуют. Именно если, подобно электронам, приписать собственное вращение и протонам, то в случае ядра гелия, состоящего из четырех протонов и двух электронов, можно допустить, что магнитные моменты этих шести миниатюрных магнитиков взаимно уничтожатся; то же самое может иметь место и в ядре кислорода, которое построено из четырех гелиевых ядер. Напротив, этого не может быть в ядре водорода, тождественном протону, а также и в ядрах азота, построенных из трех гелиевых ядер, двух протонов и одного электрона¹.

К еще более важным выводам, чем в области спектроскопии, принцип биений в квантовой механике приводит в вопросе о химических связях, как это показали Гейтлер и Лондон². Начало квантовой теории валентности было положено исследованием взаимодействия двух нейтральных атомов водорода. Мы обозначим оба ядра индексами *a* и *b*, а электроны 1 и 2. Тогда по Гейтлеру и Лондону основное уравнение Шредингера для задачи о двух атомах водорода напишется в форме:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z_2^2} + \\ & + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left\{ E - e^2 \left[\frac{1}{r_{ab}} + \frac{1}{r_{1a}} - \frac{1}{r_{a1}} - \frac{1}{r_{a2}} - \frac{1}{r_{b1}} - \frac{1}{r_{b2}} \right] \right\} S = 0. \end{aligned} \right\} \quad (155)$$

На основании этого уравнения³ Гейтлер и Лондон вычислили энергию взаимодействия двух атомов водорода, находящихся в основном состоянии. Это им удалось при помощи приближений, причем они исходили из известных фундамен-

¹ Это следует из атомного веса 14 и заряда ядра 7.

² W. Heitler und F. London, «Zs. f. Phys.», 44, 455, 1927.

³ Следует иметь в виду, что при притяжении потенциальная энергия отрицательна, а при отталкивании — положительна.

тальных функций основного состояния атома водорода и рассматривали задачу, как задачу о возмущении. Вычисления показали, что благодаря *резонансным биениям* для энергии взаимодействия получаются *два различных решения*. Получается на первый взгляд странный вывод, что два атома водорода могут действовать друг на друга двумя совершенно различными способами.

В случае первого решения, которое мы для краткости будем называть α -решением, имеется конечная вероятность для электрона одного атома принадлежать также к другому. Во втором случае назовем его β -решением ¹ — такой конечной вероятности не существует.

Первое решение дает для энергии взаимодействия на *средних расстояниях отрицательные значения*, т. е. *притяжение*, которое убывает с увеличением расстояния; наоборот, при малых расстояниях оно переходит в *отталкивание*. β -решение всегда дает *положительную энергию взаимодействия*, т. е. *постоянное отталкивание*, так что при сильном сближении атомов возникает *упругое отражение*.

По Гейтлеру и Лондону α -решение дает объяснение так называемой *гомополярной связи*. С самого основания электронной теории атома казалось естественным сводить *химические процессы* к действию *электрических сил*². Сравнительно просто это происходит в молекулах, состоящих из *заряженных противоположными знаками ионов*, т. е. из атомов, которые либо отдали несколько электронов, либо присоединили лишние электроны и перестали быть нейтральными. Но кроме таких *гетерополярных связей* между положительным и отрицательным ионами должны еще существовать *гомополярные связи* между *нейтральными атомами*; это вытекает хотя бы из того факта, что молекулы многих элементов *двухатомны*.

С точки зрения прежней квантовой теории задача о взаимодействии двух нейтральных атомов представлялась *неопредели-*

¹ Из математических соображений, на которых мы здесь не можем останавливаться, α -решение называется *симметричным*, а β -решение — *анти-симметричным*. Первому решению соответствуют также функции координат электронов, которые меняют знак при перестановке обоих электронов. Во втором случае изменения знака при перестановке не происходит.

² Это представление, высказанное еще Вердегуутом в 1812 г., было вновь выдвинуто Косселем в 1916 г. на почве электронной теории.

ной. Пока силы взаимодействия понимались только как кулоновы, в частном случае атомов водорода нельзя было рассчитать взаимодействие, не зная *фаз* обоих атомов, т. е. углов, образованных радиусами-векторами обоих электронов с линией, соединяющей ядра. Это затруднение отпадает в волновой механике, заменяющей орбиту электрона в известном смысле *непрерывным распределением зарядов*, в котором всевозможные фазы рассматриваются одновременно. Таким образом волновая механика определяет *зависимость энергии взаимодействия от расстояния между ядрами*.

То расстояние, для которого энергия взаимодействия имеет *минимум*, можно назвать расстоянием между ядрами нормальной молекулы водорода, а соответствующее ему минимальное значение энергии — *энергией диссоциации* молекулы водорода. Ее задают обычной величиной той *разности потенциалов*, которая, будучи умножена на заряд электрона, равна этой энергии. Гейтлер и Лондон нашли на основании вычислений, произведенных в первом приближении, что расстояние, для которого энергия взаимодействия имеет минимум, примерно в полтора раза больше радиуса электронной орбиты в нормальном атоме водорода (по теории Бора); этот последний равен $0,532 \text{ \AA}$ ($5,32 \cdot 10^{-9} \text{ см}$). Сугиура¹ произвел вычисления по методу Гейтлера и Лондона во втором приближении и нашел для расстояния между ядрами $0,80 \text{ \AA}$ и для напряжения диссоциации $3,2 \text{ V}$. Ванг² вычислил величины $0,74 \text{ \AA}$ и $3,8 \text{ V}$; наблюдаемые же на опыте значения равны $0,75 \text{ \AA}$ и $4,4 \text{ V}$. Если принять во внимание, что расчет молекулы водорода можно было произвести лишь путем исключительно трудных приближенных вычислений, то полученное совпадение теории с данными опыта следует признать вполне удовлетворительным.

Тогда как для взаимодействия между нейтральными атомами водорода получаются два различных решения, из которых одно выражает гомеополлярную связь, Гейтлер и Лондон нашли, что для взаимодействия двух *нейтральных атомов гелия*, находящегося в нормальном состоянии, возможно лишь β -решение,

¹ Y. Sugiura, «Zs. f. Phys.», 45, 484, 1927.

² S. C. Wang, «Phys. Rev.», 31, 579, 1928.

дающее *постоянное отталкивание*. Второе решение оказывается *невозможным* вследствие действия принципа Паули, и, таким образом, невозможно образование гомеополярной молекулы из атомов гелия в нормальном состоянии ¹.

Разница между водородом и гелием в отношении возможности образования гомеополярной связи, как показал Лондон ², подлежит дальнейшему обобщению. Принцип Паули можно еще выразить так, что в атоме возможны *не более двух электронов с одинаковым движением вокруг ядра*, т. е. таких, которые обладают одинаковыми значениями главного и побочного квантовых чисел и плоскости орбит которых *совпадают* ³. Таким образом планетная система атома содержит, вообще говоря, *парные совпадающие по движению электроны*, но кроме них могут иметься и *непарные электроны*, лишённые, так сказать, «близнецов». Гомеополярную связь по Лондону, можно понимать, как *объединение в пару двух одинаковых электронов, являющихся непарными в разных атомах*.

Таким образом *химическая валентность* атома определяется числом его *непарных электронов*. С другой стороны, квантовое число результирующего момента количества движения атома (точнее, его плановой системы) равно половине числа непарных электронов (так как каждому электрону соответствует квантовое число собственного вращения $\pm \frac{1}{2}$). Но если

результирующий момент определяется числом $\frac{r}{2}$, то, как известно из теории атома, *кратность спектральных термов* атома задается числом $(r + 1)$; при одном непарном электроне возникают дублетные термы, при двух — триплетные, при трех — четверные, и т. д. Теория Лондона приводит, таким образом, к выводу, что *валентность равна уменьшенной на единицу кратности спектральных термов*.

Непосредственно очевидно, что число непарных электронов должно быть четным при четном порядковом номере элемента

¹ Только между возбужденными атомами гелия (т. е. находящимися не в нормальных состояниях) возможно осуществление связи.

² F. London, «Zs. f. Phys.», 46, 465, 1928; 50, 24, 1928.

³ Согласно обозначениям гл. XII здесь имеется в виду совпадение значений n , l и m (l). Таким образом понятие совпадающих электронов более узкое, чем введенное в гл. XII понятие эквивалентных электронов, для которых равны n и l , но m (l) могут быть различны.

и нечетным при нечетном атомном номере. Элементы четного столбца периодической системы должны обладать четной *валентностью*, остальные же *нечетной*, что подтверждается опытом.

В связи с принципом Паули было выше показано (гл. XII), что одноквантовая электронная группа может заключать не более двух электронов, двухквантовая — не более восьми, трехквантовая — не более восемнадцати. Число различных возможных движений вокруг ядра равно половине этих чисел; оно всегда равняется n^2 для n -квантовой группы, т. е. единице для одноквантовой, четырем — для двухквантовой, девяти — для трехквантовой. В основном (устойчивом) состоянии *внешняя* электронная группа (с наибольшим квантовым числом) может заключать от одного до восьми электронов, как это известно из теории строения атома. Внешняя группа во втором периоде системы элементов двухквантовая, в третьем — трехквантовая и т. д. Начиная с *третьего периода все внешние электроны могут быть непарными* (исключение представляют, по видимому, лишь благородные газы). Иначе дело обстоит во *втором периоде* (от лития до неона). На основании сказанного выше для внешних электронов здесь представляются лишь *четыре* различных возможных движения, поэтому из *семи* внешних электронов *только один* может быть *непарным*, из *шести* могут быть лишь *два* непарных.

Теория Лондона приводит в согласии с химическими данными к выводу, что принадлежащие к седьмому столбцу *галогиды* могут быть *одно-, трех-, пяти- и семивалентными*; единственное исключение представляет первый галогид, *фтор*, который по теории может быть лишь *одновалентным*, и, действительно, никогда не наблюдался с другой валентностью. Точно так же из теории Лондона вытекает, что элементы шестого столбца могут быть *двух-, четырех- и шестивалентными* кроме кислорода, могущего быть лишь *двухвалентным*, что опять-таки всегда имело место на опыте ¹.

Возникновением молекулярной связи валентности атома полностью или частично *насыщаются*. Возможно, конечно, что

¹ Замечательно, что у элементов пятого столбца, у которых одновалентность почти не играет роли сравнительно с тройной и пятерной валентностью, согласно правилу Лондона проявляются лишь четверные и шестерные термы, а не дублетные.

молекула, как таковая (т. е. в качестве целой системы), содержит еще непарные электроны; в этом случае *ненасыщенная молекула* является *радикалом*. Во всяком случае электрон, соединившийся в пару с соответственным электроном другого атома, в дальнейшем уже перестает играть роль в валентности. Электрон, уже попавший в пару, не может участвовать в связи с третьим электроном. Исследования о взаимодействии двух атомов были распространены Лондоном¹ на случай *задачи о трех атомах* и случай *взаимодействия атома с молекулой*.

Гейзенберг² нашел, что явление ферромагнетизма также относится к области квантового резонанса. Наконец, Бек³ показал, что в основе *структуры ядра* лежат *квантовые эффекты*, аналогичные тем, которые играют роль в строении атома и в молекулярных связях.

Открытые Астоном *изотопы* оказывается возможным уложить в простую систему на основании закономерностей, которые уже неоднократно обращали на себя внимание физиков⁴. Эти закономерности, дающие также указания относительно строения ядра атомов по Беку, можно частично свести к принципу Паули и собственному *вращению электрона*.

¹ F. London, Sommerfeld-Festschrift, Leipzig (Hirzel 1928), стр. 104.

² W. Heisenberg, «Zs. f. Phys.», 49, 619, 1928.

³ G. Beck, «Zs. f. Phys.» 47, 407, 1928; 50, 458, 1928.

⁴ Ср. например, W. A. Harkins, «Zs. f. Phys.», 50, 97, 1928.

ОТКРЫТИЕ ПАРАВОДОРОДА

Наиболее надежным пробным камнем ценности и плодотворности физической теории всегда считалась ее способность давать толчок к новым открытиям. С этой точки зрения открытие Дэвиссоном и Джермером в 1927 г. интерференции и дифракции волн материи, предсказанной теорией, следует считать большим успехом волновой механики. В 1929 г. волновая механика привела ко второму исключительно важному экспериментальному открытию: мы имеем в виду получение параводорода Эйкеном и Бонгефером и их сотрудниками. Основой для этого открытия послужила теория молекул, состоящих из двух одинаковых атомов, развитая на почве волновой механики.

Простейшей моделью такой молекулы является гантель, вращающаяся вокруг оси, перпендикулярной к штанге, соединяющей пары гантели. К этой модели применимо предингеровское уравнение для ротатора, о котором говорилось выше (уравнение (59) в обобщенной форме (65), при учете одинаковости масс обоих атомов). Точные подсчеты, на которых мы здесь не можем останавливаться, приводят к результату, который делается вполне понятным из рассмотрения прежнего уравнения (59); именно фундаментальные функции ротатора, состоящего из двух одинаковых атомов, имеют простую форму:

$$\psi_n = \sin(n\varphi), \quad (156)$$

где φ — угол вращения, а n — целое вращательное квантовое число. С другой стороны, значения энергии, получающиеся из рассмотрения характеристических чисел, задаются формулой:

$$\epsilon_n = n(n+1) \frac{\hbar^2}{8\pi^2 j}. \quad (157)$$

(ср. прежнее уравнение (60); j обозначает момент инерции молекулы. Наконец, математическое исследование приводит к

выводу, что характеристическому числу, определяемому квантовым числом n , соответствует $(2n + 1)$ различных фундаментальных функций; иначе говоря, в n -м уровне энергии совпадают $(2n + 1)$ значения характеристических чисел, и поэтому n -му уровню следует приписать статистический вес:

$$g = 2n + 1. \quad (158)$$

Совершенно очевидно, что при повороте гантели на 180° , т. е. при изменении φ на π , оба атомных ядра, образующие гантель, *меняются местами*. Существенно между собой отличаются, однако, случаи, когда вращательное квантовое число *четное* и когда оно *нечетное*. В первом случае при возрастании φ на величину π функция ψ остается совершенно неизменной; во втором случае неизменной остается лишь абсолютная величина ψ , знак же меняется на обратный. В первом случае, таким образом, перестановка координат обоих атомных ядер не вызывает изменения знака фундаментальной функции, во втором вызывает изменение знака. Поэтому в первом случае фундаментальная функция называется *симметрической*, во втором — *антисимметрической*. Совокупность уровней энергии можно разбить на *две системы*, из которых одной соответствуют симметрические, другой — антисимметрические функции.

Вероятность перехода между двумя произвольными состояниями зависит по квантовой механике от фундаментальных функций обоих состояний. В качестве обобщения формулы (121) для вероятности перехода в системе из двух частиц имеем формулу:

$$a(n, m) = \iint \psi_n \psi_m (q_1 + q_2) dq_1 dq_2. \quad (159)$$

Значки n и m относятся к двум различным квантовым состояниям, q_1 и q_2 — координаты обеих частиц, и двойной интеграл следует распределить на всевозможные значения этих координат. (На точном выводе уравнения (159) мы здесь, конечно, не можем останавливаться.)

Легко показать, что для комбинации *симметрического* состояния с *антисимметрическим* вероятность перехода всегда равна нулю. Значение вероятности перехода не должно, конечно, зависеть от того, какому из обоих ядер мы произвольно припи-

сываем значок 1. Перестановка ядер не может, таким образом менять значение $a(n, t)$; однако, если из чисел n и t одно четное, другое — нечетное, т. е. если одна из фундаментальных функций симметрическая, другая — антисимметрическая, такая перестановка меняет знак подынтегрального выражения, следовательно, и знак $a(n, t)$. Но какая-либо величина может оставаться неизменной при перемене знака только в том случае, если она равна нулю; таким образом $a(n, t)$ равно нулю. Следовательно, для молекулы, состоящей из двух одинаковых атомов, возможны два различных типа состояний, иначе — две различные модификации, переходы между которыми по квантовой механике невозможны. Одна модификация характеризуется четными, другая — нечетными значениями ротационного квантового числа. Молекула одной модификации, согласно соображениям квантовой механики никогда не имела бы возможности перейти в молекулу другой модификации. Совокупность состояний, соответствующих симметрическим фундаментальным функциям, т. е. четным вращательным квантовым числам, дает так называемую парамодификацию; состояния с антисимметрическими функциями, т. е. с нечетными квантовыми числами, образуют ортомодификацию.

Эта исторически сложившаяся терминология возникла еще до появления квантовой механики; именно спектроскопические наблюдения привели к установлению двух модификаций нейтрального атома гелия (содержащего два планетных электрона), получивших название паргелия и ортогелия. Впоследствии рассмотрение задачи о двух электронах в атоме гелия в волновой механике привело к выводу, что фундаментальные функции паргелия симметричны по отношению к его электронам, функции же ортогелия антисимметричны¹. Анализ спектра гелия показывает далее, что термы ортогелия триплетные, тогда как термы паргелия простые. Как было сказано выше (гл. XVI),

¹ В этих соображениях мы пока пренебрегаем собственным вращением электронов. При таком предположении согласно принципу Паули следует признать невозможными такие состояния, функции которых зависят от обоих электронов совершенно одинаково, т. е. те состояния, фундаментальные функции которых симметрические. Иначе говоря, по принципу Паули возможны лишь ортосостояния, тогда как парасостояния исключаются; только собственное вращение электронов делает возможным появление и парасостояний.

триплетные термы возникают тогда, когда оба электрона представляют одинаково направленные магниты, одиночные же термы соответствуют противоположному случаю; таким образом в *ортомодификации* магнитные моменты электронов оказываются *параллельными* и одинаково направленными, в *парамодификации* же они устанавливаются *антипараллельно*. Наконец, триплетность ортотермов по сравнению с всегда простыми паратермами заставляет приписать ортосостояниям втрое больший статистический вес, т. е. втрое большую повторяемость, чем парасостояниям.

С задачей о двух электронах атома гелия во многих отношениях оказывается весьма родственной задача о *двухатомных молекулах* элементов (два одинаковых ядра). Если ядра обладают собственным вращением (имеют момент), то, как показывают исследования Гейзенберга¹ и Гунда², в *полосатом* спектре молекулы должны появляться как орто-, так и паратермы. При отсутствии собственного вращения ядер среди линий, образующих одну полосу (выражаемых общей формулой с определенным переменным квантовым числом), каждая вторая должна выпадать. Но и в случае наличия вращения ядер, когда все линии налицо, они все же должны обладать, как показал Гейзенберг, *переменяющимися интенсивностями*, так как пара- и ортосостояния повторяются неодинаково часто.

Как выпадение линий (через одну), так и чередующиеся интенсивности их действительно и наблюдались в полосатых спектрах уже гораздо раньше; в соответствии с теорией в полосатых спектрах *гелия и кислорода* имеет место выпадение линий, в спектре же водорода наблюдались переменные интенсивности. В самом деле, если по аналогии с электронами приписать собственное вращение и протонам, то вполне можно себе представить, что в ядре гелия, состоящем из четырех протонов и двух электронов, эти шесть миниатюрных магнитов взаимно скомпенсированы; то же самое возможно и в случае ядра кислорода, состоящего из четырех ядер гелия; наоборот, такая компенсация невозможна для ядер водорода — протонов.

Среди всех молекул элементов молекула водорода отличается тем, что ядра ее не составные, а представляют отдельные про-

¹ W. Heisenberg, «Zs. f. Phys.», 38, 411, 1926 и 41, 239, 1927.

² F. Hund, «Zs. f. Phys.», 42, 93, 1927.

тоны. Аналогия с атомом гелия приводит к предположению, подтверждаемому точным расчетом, что в молекулах ортоводорода ядерные магниты параллельны и одинаково направлены, тогда как в молекулах параводорода они антипараллельны, кроме того ортоводороду следует приписать втрое больший статистический вес, чем параводороду (табл. I).

Таблица I

Сравнительные свойства параводорода и ортоводорода

Модификация	Фундаментальная функция	Вращательное квантовое число	Направления моментов протонов	Статистический вес
Параводород	Симметричная	Четное	Антипараллельное	Единица
Ортоводород	Антисимметричная	Нечетное	Параллельное	Три

Совместное существование двух различных модификаций водорода сказывается не только на молекулярных спектрах; как впервые было показано Деннисоном¹, оно имеет решающее значение для хода температурной зависимости удельной теплоемкости водорода. Прежняя квантовая теория в существенных чертах уже дала правильный ход этой зависимости, но не могла объяснить более тонкие особенности; к полному выяснению этого вопроса привело лишь открытие двух различных видов водорода. Энергия молекулы водорода состоит из двух частей, из которых одна представляет энергию поступательного движения молекул, другая же зависит от вращения молекулы. Эта вторая часть, о которой в дальнейшем мы только и будем говорить, определяется из уравнения (157). Среднее ее значение согласно квантовой теории получается из уравнения (135), если в последнее еще ввести статистический вес (в классической статистике это было лишним). В уравнение (135), как в числе сла-

¹ P. M. Dennis on, «Proc. Roy. Soc.», (A), 115, 483, 1972.

гаемых числителя, так и в знаменателе, входит экспоненциальное выражение $(e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}})$; этому выражению пропорционально число частиц, энергия которых равна определенной величине ϵ_i , из ряда возможных дискретных значений. Если для данного уровня энергии совпадают g характеристических чисел, то, очевидно, вероятность $\bar{\epsilon}$ $\text{pr}(\epsilon_i)$, что частица имеет данную энергию в g раз больше, чем в случае «простого» уровня энергии. Вводя в уравнение (135) множитель g , мы получим для средней энергии выражение:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum g_i \epsilon_i e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}}}{\sum g_i e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}}}. \quad (160)$$

Полагая для сокращения

$$\frac{1}{kT} = x \quad (161)$$

и

$$\sum g_i e^{-x \epsilon_i} = Q, \quad (162)$$

(где Q так называемая «сумма состояний» Планка), находим:

$$\frac{dQ}{dx} = - \sum g_i \epsilon_i e^{-x \epsilon_i} \quad (163)$$

и, далее, по уравнению (160):

$$\bar{\epsilon} = - \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dx} = - \frac{d(\ln Q)}{dx}. \quad (164)$$

Так как масса одного моля (граммолекулы) относится к массе одной молекулы, как абсолютная газовая постоянная R к постоянной Больцмана k , то для части теплоемкости, зависящей от *вращения* и рассчитанной на моль, получим:

$$C = \frac{R}{k} \frac{d\bar{\epsilon}}{dT}. \quad (165)$$

Но по уравнению (161):

$$dT = - kT^2 dx, \quad (166)$$

следовательно,

$$C = -\frac{R}{k^2 T^2} \frac{d\epsilon}{dx} \quad (167)$$

или по уравнению (164):

$$\frac{C}{k} = x^2 \frac{d^2 \ln Q}{dx^2}. \quad (168)$$

В частном случае вращающейся молекулы положим для со- вращения

$$\frac{\hbar^2}{8\pi^2 J} x = \sigma. \quad (169)$$

Тогда, если под ϵ понимать энергию вращения, по уравнению (167) будем иметь:

$$\epsilon_n = n(n+1) \frac{\sigma}{x}, \quad (170)$$

и принимая во внимание уравнение (158):

$$Q = \sum (2n+1) e^{-n(n+1)\sigma}. \quad (171)$$

Так как для *параводорода* возможны лишь *четные* значения n ($n=0, 2, 4, \dots$), а для *ортоводорода* — только *нечетные* ($n=1, 3, 5, \dots$), то для обеих модификаций получаются различные значения Q , а следовательно, по уравнению (168) и *разные величины удельной теплоемкости*. Именно ¹:

$$Q(\text{пара}) = 1 = 5e^{-6\sigma} = 9e^{-20\sigma} = \dots \quad (172)$$

и

$$Q(\text{орто}) = 3e^{-2\sigma} = 7e^{-12\sigma} = 11e^{-30\sigma} = \dots \quad (173)$$

Различие между теплоемкостями может, конечно, проявиться только при достаточно низких температурах, при которых вообще

¹ Воспользовавшись тождеством

$$n(n+1) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

можно переписать уравнения (172) и (173) в форме, которой пользуется Эйкен.

наблюдаются отклонения квантовой теории от классической; В числе кривых рис. 3 имеются две, обозначенные 100% и 0%; первая дает температурный ход теплоемкости для чистого параводорода, вторая — для чистого ортоводорода. В обоих случаях зависимость от температуры вычлелена по уравнению (168) с учетом уравнений (172) и (173); для момента инерции молекулы принято число $4,67 \cdot 10^{-41}$ см² (по Гори)¹, найденное из спектроскопических данных. Обе кривые, как показывает рисунок, с повышением температуры стремятся к предельному значению R (1,98 кал)², требуемому классической термодинамикой. Но тогда как при охлаждении «вращательная теплоемкость» ортоводорода непрерывно убывает, для параводорода она возрастает и приблизительно при -100°C достигает максимума, который, примерно, наполовину превосходит классическое значение.

Кроме кривых для чистых модификаций на рис. 3 изображены другие кривые для смесей в различных пропорциях. Они рассчитаны по формуле Деннисона:

$$C = \gamma C (\text{пара}) + (1 - \gamma) C (\text{орто}), \quad (174)$$

где γ означает долю параводорода в смеси. Особенно важна, конечно, кривая для $\gamma = \frac{1}{4}$ (т. е. $\gamma = 25\%$), так как в этом случае доли в смеси относятся как статистические веса пара- и ортоводорода (1:3). Как видно из рис. 3 (впервые на это указал Деннисон), на эту кривую прекрасно укладываются опытные данные о «вращательной теплоемкости», известные из более ранних работ (на рис. 3 эти значения обозначены крестиками \times).

Но очевидно, что только при высоких температурах 25% содержание параводорода может удовлетворять условиям равновесия. Действительно, при очень низких температурах σ очень велико, так что величина Q (пара) стремится к единице, а Q (орто) — к нулю. При очень низких температурах в равновесном состоянии должен находиться почти чистый параводород,

¹ Т. Ногі. «Zs. f. Phys.», 44, 834, 1927.

² По классической термодинамике удельная молекулярная теплоемкость равна $\frac{5}{2} R$, причем $\frac{3}{2} R$ приходится на поступательное движение.

новесия (при некоторой определенной температуре) по уравнению (162) получим:

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} = \frac{Q(\text{пара})}{3Q(\text{орто})}. \quad (175)$$

По этой формуле Эйкен рассчитал значения равновесных концентраций при разных температурах (табл. II).

Таблица II

Равновесные концентрации обеих модификаций водорода при разных температурах (по Эйкену)

Абс. температура	Процентное содержание	
	параводорода	ортоводорода
21,2	39,7	0,3
28,3	97,8	2,2
42,5	85,8	14,2
60,0	65,2	34,8
85,0	48,0	52,0
170,0	25,3	74,7

Таким образом, если измерения удельной теплоемкости при низких температурах дали те значения, которые соответствуют только 25% содержанию параводорода, то из этого следует заключить что во время измерений не только не было равновесия, но и не существовало заметной тенденции к его установлению. Действительно, из только что изложенных соображений квантовой механики следует, что переходы из одной модификации в другую невозможны. Однако, этот «запрет» не вполне строгий; собственное вращение ядер, как показывают соображения квантовой механики, несколько смягчают запрет взаимных переходов. Наличие собственного вращения обуславливает небольшие отступления фундаментальных функций от симметричности или антисимметричности и вследствие этого вероятность перехода из орто- в парасостояние перестает быть

точно равной нулю и принимает отличную от нуля *малую* величину. Это имеет место, как в случае задачи о двух электронах, так и в задачах о двух ядрах. Что атомы гелия в виде исключения допускают переходы из орто- в парасостояние, вытекает из существования очень слабой линии, обусловленной такой комбинацией термов; эту линию открыл в спектре гелия Лайман ¹.

Если переход молекулы водорода из орто- в парасостояние вообще возможен, то при низких температурах через достаточно долгое время следует ожидать *обогащения* смеси параводородом сверх нормальных 25%; это обогащение должно сказаться в изменениях удельной теплоемкости. Эйкену и Гиллеру действительно удалось наблюдать это явление, предсказанное теорией; они сжимали водород под высоким давлением (100—200 ат) и, охладив до температуры жидкого воздуха (около 70—80° абс.), наблюдали его в течение нескольких недель. Применение высокого давления заметно ускоряло установление равновесия, которое без давления мало продвигалось даже в течение одного года. Температурный ход теплоемкости, промерявшийся через определенные промежутки времени, прекрасно совпадает, как видно из рис. 3, с кривыми, рассчитанными для различных концентраций параводорода, превосходящих нормальную его концентрацию (31,1; 36,4; 43,1%).

Если уже применение высокого давления ускоряет установление равновесия, то, как показали Бонгефер и Гартек ², этого можно полностью достигнуть, применяя в качестве *катализатора древесный уголь*. Бонгефер и Гартек поглощали водород древесным углем при температуре жидкого водорода (21° абс.), а затем опять его испаряли. Уже через 5 минут содержание параводорода поднялось до 88%, через 10 минут оно достигло 98,3%, через 15 минут — 99,3% и, наконец, через 20 минут оно достигло 99,7%, что соответствует теоретически вычисленной равновесной концентрации при этой температуре (табл. II). Измерение, произведенное через 2 часа, дало то же значение 99,7%, что доказывает достижение равновесия.

Для определения содержания параводорода Бонгефер и Гар-

¹ Th. Lyman, «Nature», 1922, стр. 278.

² K. F. Bönhöffer und P. Harteck, «Zs. f. phys. Chem.», (B), 3, 113, 1929.

ток измеряли не непосредственно удельную теплоемкость, а пропорциональную ей *теплопроводность* (что удобнее); для этого измерялось электрическое сопротивление определенной проволоки. Согласно известному методу¹ при таких измерениях в сосуде, в котором поддерживается постоянная температура, натянута проволока, нагреваемая электрическим током, причем температура ее определяется по сопротивлению; по температуре и электрической энергии, подаваемой в проволоку, вычисляется теплопроводность. По изменениям сопротивления можно было сразу судить об изменении концентрации параводорода.

После того как удалось получить практически *чистый* параводород, можно было ближе исследовать его свойства. Измерения Бонгефера и Гартека, а также Клузиуса и Гиллера² показали, что давление *паров* параводорода *выше*, чем давление обычного водорода³, тогда как *точки плавления* оказываются ниже. Клузиус и Гиллер проследили также температурный ход «вращательной теплоемкости» чистого параводорода в пределах от 80 до 161° абс. (рис. 3). В полном согласии с квантовой теорией они нашли, что уже при 115° абс. эта теплота превосходит *классическое значение* 1,98 кал (= R) и, начиная от этой точки, непрерывно возрастает; при температуре 161° абс., до которой были доведены эти измерения, было экспериментально найдено для «теплоты вращения» 2,79 кал в полном согласии с теорией.

Между нормальным водородом и параводородом не было обнаружено никакой разницы в химическом и электрохимическом отношениях; точно так же не отличаются между собой их теплоты плавления и теплоемкости в твердом и жидком состояниях. Напротив, при изучении *спектра испускания параводорода* обнаружена лишь часть линий, наблюдаемых обычно у молекулярного водорода, именно: только линии с четными значениями вращательного квантового числа.

В противоположность параводороду, теория не дает указаний на возможность получения *ортоводорода* в чистом виде; невозможно даже повышение процентного содержания его, так как

¹ Этот метод предложен А. Шлейермахером, «Wied. Ann.», 34, 623, 1888.

² K. Clusius und K. Hiller, «Zs. f. phys. Chem.», (B), 3, 158, 1929.

³ При 20° абс. давления пара 787 мм для чистого параводорода против 760 мм для обычного водорода и 751 мм для ортоводорода (последняя цифра вычислена).

теория не знает равновесий, при которых ортоводород имел бы содержание выше 75%.

Совместное существование пара- и ортомомекул, конечно, не ограничивается случаем водорода; оно должно иметь место у всех *двухатомных* веществ, у которых оба ядра имеют одинаковые массы и обладают собственным *вращением* (результатирующим моментом). Действительно, *спектроскопически* удалось доказать существование двух модификаций для *азота, фтора, хлора и иода*¹. Измерения интенсивности в полосатых спектрах приводят к выводу, что в случае фтора вероятное отношение концентраций обеих модификаций, как и у водорода, 3:1; наоборот, у азота это отношение равно 2:1², а у иода (повидимому, благодаря наличию очень большого собственного момента ядер) мало отличается от 1:1. Среди других элементов водород занимает *исключительное положение* лишь постольку, поскольку *момент* его молекул исключительно мал; поэтому только в случае водорода можно обнаружить сдвиг нормального равновесия при температурах не слишком низких (для других элементов это возможно лишь совсем вблизи абс. нуля (несколько градусов абс.); и только поэтому лишь у водорода возможны такие наблюдения в газообразном состоянии).

Если ядра молекулы элемента лишены собственного вращения, то в полосах соответствующего молекулярного спектра, как уже было указано, выпадает *каждая вторая* линия. Необходимым условием этого явления в чистом виде является *полная одинаковость* обоих ядер. Поэтому из небольших аномалий, наблюдаемых в спектре поглощения *кислорода* (в атмосфере), Жюнк и Джонстон³ в 1929 г. пришли к важному выводу, что не все ядра кислорода в точности одинаковы, как это до тех пор думали. Детальный анализ полосатого спектра кислорода показал⁴, что на 10 000 молекул кислорода восемь представляют соединения атома с обычной массой 16 с атомом, имеющим массу 18, кроме того, одна молекула состоит из атома с массой 16 и атома с массой 17. У этих редких молекул име-

¹ R. W. Wood and F. W. Loomis, «Phys. Rev.», 31, 705, 1928.

² F. Hund, «Zs. f. Phys.», 42, 93, 1927; R. de L. Kronig, «Naturwiss.», 16, 835, 1928.

³ F. W. Gianque and H. L. Johnston, «Nature», 123, 123, 1929; «Journ. Amer. Chem. Soc.», 51, 1436, 1929.

⁴ R. T. Birdge, «Nature», 124, 13, 1929.

ются вращательные уровни энергии с четными и нечетными квантовыми числами, в согласии с требованиями волновой механики.

Подобным же образом Кинг и Бердж¹ установили существование молекулы *углерода*, представляющей соединение атома углерода обычной массы 12 с атомом, обладающим массой 13. Спектроскопическое открытие оставшихся неизвестными *редких изотопов кислорода* с массами 17 и 18, а также изотопа углерода с массой 13 следует рассматривать как большое достижение квантовой механики.

¹ A. S. King and K. T. Birdge, «Nature», 124, 127, 1929.

ВОЛНОВАЯ ТЕОРИЯ РАДИОАКТИВНОСТИ

Что эффекты, предсказываемые волновой механикой, имеют значение не только для планетной системы атома, но и для явлений внутри атомного ядра, ясно уже из того обстоятельства, что длина де-Бройлевской волны α -частиц, вылетающих при радиоактивном распаде, приблизительно совпадает с линейными размерами атомных ядер; на основании многочисленных экспериментов порядок величины этих последних 10^{-13} — 10^{-12} см. Так как масса α -частицы равна $6,6 \cdot 10^{-24}$ г, и скорость ее приблизительно равна 5% скорости света, то для соответствующей длины фазовой волны получается приблизительно $6 \cdot 10^{-13}$ см.

На почве волновой механики теория радиоактивности развита в 1928 г. Гамовым¹ и одновременно Гершей и Кондоном². В существенных чертах эта теория примыкает к известному положению классической механики, согласно которому для материальной точки, движущейся в силовом поле, закрыты такие области, в которых

$$E - V < 0, \quad (176)$$

где E — полная энергия материальной точки, а V — ее потенциальная энергия. Действительно, в этих областях живая сила была бы отрицательна, а следовательно, скорость оказалась бы мнимой.

Поэтому материальная точка может двигаться лишь в таких областях, в которых $V < E$. Если две или несколько областей, в которых $V < E$, отделены друг от друга «барьерами», в которых $V > E$, то возможно несколько различных движений с одним и тем же значением энергии; но каждое из этих движе-

¹ Г. Гамов, «Zs. f. Phys.», 51, 204, 1928; 52, 496, 1928, ср. также М. v. Laue, «Zs. f. Phys.», 52, 726, 1928.

² R. W. Gurney und E. U. Condon, «Phys. Rev.» 33, 127, 1929.

ний ограничено исключительно одной областью. Барьеры препятствуют переходу.

Для теории атомного ядра этот вывод используется таким образом, что ядро представляют себе окруженным барьером с высоким потенциалом; этот барьер делает для составных частей ядра выход в область планетной системы атома невозможным. Из наблюдений над рассеянием α -частиц атомами совершенно ясно следует, что вплоть до расстояний, примерно, в 10^{-12} см в точности справедлив закон Кулона; следовательно, вплоть до таких расстояний потенциал можно считать равным заряду

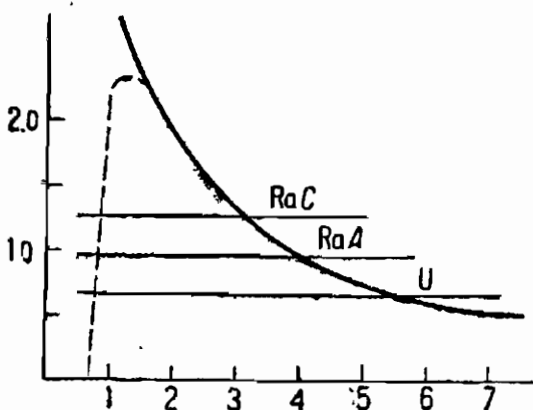


Рис. 4.

ядра, деленному на расстояние, причем потенциал принимается положительным; ведь, отталкивательной силе всегда соответствует положительный потенциал, а притягательной — отрицательный. Кривая, представляющая потенциал как функцию расстояния от ядра, с уменьшением расстояния непрерывно и все круче подымается в форме гиперболы.

Однако на некотором критическом расстоянии силовое поле должно менять знак. Тогда как на расстояниях, больших критического, частица отталкивается, на малых расстояниях она должна притягиваться; иначе α -частица не могла бы оставаться внутри ядра. Следовательно, в пределах этого расстояния потенциал от положительных значений переходит к отрицательным, и кривая должна резко спадать. На рис. 4 изображена

кривая потенциала для атомного номера 82¹ по Гернею и Кондону. За единицу по оси абсцисс принято 10^{-12} см, за единицу по оси ординат выбрано 10^{-5} эрга. Для сравнения проведены те горизонтальные линии, которые соответствуют кинетическим энергиям α -частиц, выбрасываемых атомами RaC', RaA и U. RaC' является примером элемента с исключительно короткой продолжительностью жизни (время полураспада приблизительно 10^{-8} сек.); U — наоборот, элемент с наибольшей продолжительностью жизни (время полураспада $5 \cdot 10^9$ лет); RaA лежит между ними, имея время полураспада 3,05 минуты. Из рис. 4 непосредственно видно, что для этих атомов высота силового барьера относительно велика.

На основании выводов волновой механики Герней и Кондон, а также Гамов, использовали модель силового барьера атомных ядер для построения *теории радиоактивности*. Это оказалось возможным благодаря тому обстоятельству, что в волновой механике теорема классической механики о «запретных областях» применима лишь в таком же смысле, как, например, закон прямолинейного распространения света в волновой оптике. Это положение можно, конечно, *сохранить* и в волновой теории света; но волновая теория знает ряд отступлений, совершенно неизвестных в чисто геометрической оптике. Таким же образом с точки зрения волновой механики оказывается *возможным переход через запретную область*; для такого отступления от классической механики волновая механика может даже указать в каждом случае некоторую определенную *вероятность*.

Ясно, что такая возможность дает объяснение явлениям радиоактивного распада даже в том случае, если вероятность ее имеет *исчезающе малую величину*. Действительно, так как *радиусы ядер* имеют порядок величины 10^{-12} см, а для *скорости обращения α -частицы в ядре* следует принять величину порядка 10^9 см/сек, то для *частоты обращения* получается число 10^{21} , иначе говоря, столько раз в секунду частица подходит к силовому барьеру. Так как, например, у радия в одну секунду на $7 \cdot 10^{10}$ атомов распадается только один атом, то волновое толкование радиоактивности было бы правильным, если бы при каждом приближении α -частицы к барьеру для нее существовала

¹ Этот заряд ядра действует при выбрасывании α -частицы из RaA.

вероятность перескочить через барьер, равная приблизительно 10^{-82} .

Такая вероятность меньше всего, что только можно себе представить. Положим, например, что в трех различных странах устроено по лотерее с таким невероятно громадным числом билетов, что их хватило бы для каждого человека в мире, и пусть кто-либо купит по одному билету каждой из этих независимых друг от друга лотерей; тогда вероятность того невообразимого чуда, что он одновременно выиграл бы главные выигрыши всех трех лотерей, все же была бы во много тысяч раз больше шансов, которые α -частица имеет перескочить через барьер при однократном приближении к нему. Тем не менее эта ничтожно малая вероятность подвержена строго количественным закономерностям, получающим свое выражение во вполне точно известных постоянных радиоактивных явлений.

Как показывают соображения волновой механики (которые здесь не могут быть приведены), вероятность перехода через силовой барьер, если не считать численного множителя порядка единицы, задается экспоненциальным выражением e^{γ} где

$$\gamma = -\frac{4\pi}{h} \int \sqrt{2m(V-E)} dx, \quad (177)$$

и интеграл распространен на ширину барьера. Если еще умножить на частоту обращения α -частицы, т. е. приблизительно на 10^{21} , то получается величина порядка *постоянной радиоактивного распада* λ . Расчеты по различным методам приводят к одному и тому же конечному результату, именно:

$$\lambda = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2E}{m}} e^{-\frac{4\pi}{h} \int \sqrt{2m(V-E)} dx}, \quad (178)$$

где a — длина порядка величины радиуса той области, которая окружена силовым барьером. Так называемый период полураспада, как известно, по порядку величины обратен постоянной распада, он связан с последней величиной соотношением:

$$T = \frac{1}{\lambda}. \quad (179)$$

На рис. 5, данном Гернеем и Кондоном, построены кривые (для RaC, RaA и U) так, что по ординатам отложены значения выражения

$$y = \frac{4\pi}{h} \sqrt{2m(V-E)}, \quad (180)$$

а по оси абсцисс — расстояние. За единицу по оси абсцисс опять принято 10^{-12} см, единицей по оси ординат является 10^{-13} см. Площадь каждого маленького квадрата на рисунке представляет поэтому *отвлеченное число* 10.

Интегральное выражение, обозначенное выше через γ , представляется на рис. 5 для каждого из трех случаев площадью,

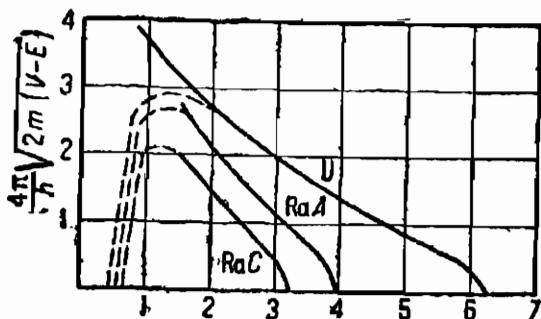


Рис. 5.

ограниченной соответствующей кривой. Смотря по тому, оказывается ли эта площадь больше одного, двух или трех таких квадратов, значение постоянной распада отличается множителем e^{-10} , e^{-20} , e^{-30} и т. д. Так как *постоянные распада*, главным образом, зависят от *показателей* в экспоненциальных выражениях, то этим объясняется парадокс, что *периоды полураспада* радиоактивных элементов меняются в столь громадных пределах — от миллионной доли секунды до биллиона лет, — тогда как начальные скорости выбрасываемых ими α -частиц почти *совпадают* между собой.

Например, постоянная распада RaC' превосходит постоянную урана в 10^{23} раз, тогда как начальная скорость α -частиц RaC' всего на 40% больше, чем скорость α -частиц урана.

Из рис. 5 можно также заключить, что площадь, изображающая величину γ , лишь незначительно зависит от того, как идет *неизвестная часть потенциальной кривой*. Для приближенного нахождения этой площади, т. е. определения порядка величины λ , вполне достаточно поэтому знать ту часть кривой, которая соответствует закону Кулона. Герней и Кондон рассчитали, таким образом, времена полураспада как элементов с наиболее короткой продолжительностью жизни, так и элементов самых долговечных; порядки величин оказались в полном согласии с данными опыта. Аналогичные расчеты удалась и Гамову¹.

Из уравнения (178) непосредственно следует также и то, что постоянная распада *тем больше*, чем больше энергия, т. е. чем больше начальная скорость α -частиц. Это обстоятельство, действительно, уже давно было известно в качестве эмпирического факта. Уже гораздо раньше Гейгер и Нэттал нашли, что в пределах отдельных *радиоактивных рядов* (ряды урана, тория и актиния) *логарифмы постоянных распада являются линейными функциями логарифмов начальных скоростей* (или так называемых длин пробега).

Имеет место соотношение:

$$\lg \lambda = A + B \lg v, \quad (181)$$

где B — универсальная постоянная, A , напротив, принимает особое значение для каждого из трех радиоактивных рядов. Действительно, это соотношение в точности следует из уравнения (178).

Обратно, из соотношения Гейгера и Нэттала можно заключить, что для всех атомов *одного и того же ряда превращений потенциальная кривая имеет почти одинаковый ход*, так что, действительно, как это показывает рис. 5, в пределах одного ряда *постоянные распада* зависят только от энергии.

Исследования Герней и Кондона, также и Гамова, представляют лишь первую основу для систематической теории атомного

¹ Более точные методы расчета вероятностей распада были разработаны Т. Секлем (Th. Sexl), «Zs. f. Phys.», 56, 67, 72, 1929 (по способу, обобщенному Лауэ), и М. Борном, «Zs. f. Phys.», 58, 306, 1929 (по аналогии с методом, открытым Дираком)

ядра. Современное развитие квантовой теории таково, что среди громадного количества разнообразных фактов, относящихся к планетной системе атома, нет ни одного, который бы представлял для теории неразрешенную загадку. Многообещающие успехи волновой механики в области радиоактивности заставляют со значительным основанием надеяться, что в сравнительно короткое время квантовая теория достигнет этой цели и в области явлений атомного ядра.

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ОБОБЩЕНИЕ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ

До сих пор мы пользовались в качестве основы волновой механики той формой уравнения Шредингера, которая соответствует обычной, *нерелятивистской* механике. Чтобы получить волновое уравнение в форме, учитывающей *теорию относительности*, мы должны воспользоваться теоремой об *изменчивости массы*. Если m обозначает *покоящуюся* массу электрона¹, а β сокращенно выражает величину

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

то масса, зависящая от скорости, равна βm , и поэтому три слагающие количества движения равны

$$p_1 = \beta m v_x, \quad p_2 = \beta m v_y, \quad p_3 = \beta m v_z. \quad (182)$$

В теории относительности, как известно, роль четвертой координаты, равноправной с тремя пространственными, играет время, умноженное на скорость света и на мнимую единицу (ict). Рассматривая слагающие скорости как производные по времени от координат, мы получаем четвертую слагающую скорость величины ic и далее *четвертую слагающую количества движения*. Назвав ее p_0 , будем иметь

$$p_0 = \beta ct. \quad (183)$$

Из уравнений (182) и (183) находим:

$$-p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = -\beta^2 m^2 (c^2 - v^2). \quad (184)$$

¹ Обозначения, употребляемые здесь, отличаются от обозначений гл. IV.

Но

$$\beta^2 (c^2 - v^2) = \beta^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2$$

и поэтому

$$-p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2 c^2 = 0. \quad (185)$$

В одной из предыдущих глав (гл. X) было показано, что слагающие количества движения p_1, p_2, p_3 можно понимать как операторы, именно, как частные производные по координатам, умноженные на h $2\pi i$. С точки зрения теории относительности p_0 нужно понимать как производную по (*ict*). В качестве обобщения прежней формулы (117) находим:

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= -\frac{h}{2\pi i c} \frac{\partial}{\partial t}, \\ p_1 &= \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (186)$$

Поэтому

$$-p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \frac{h^2}{4\pi^2} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right). \quad (187)$$

Если теперь рассматривать уравнение (185) как соотношение между операторами и применить его к шредингеровскому скаляру поля, который обозначим через ψ^1 , то мы получим *релятивистское волновое уравнение* в следующей форме:

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2} \psi = 0^2. \quad (188)$$

¹ В предыдущих главах мы обозначили скаляр поля через S , так как там малые греческие буквы обозначали фазу, фазовую постоянную и т. п.; обозначение его буквой ψ является общеупотребительным.

² Уравнение (188) часто пишут в форме:

$$\square \psi - \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2} \psi = 0,$$

если применять употребительный в теории относительности операторный символ

$$\square \approx \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

В случае наличия внешнего электромагнитного поля из уравнения энергии следует (на этом мы не будем ближе останавливаться), что оператор p_0 нужно заменить оператором

$$P_0 = p_0 + \frac{e}{c} A_0, \quad (189)$$

если A_0 — электростатический потенциал внешнего поля, рассчитанный на электрон. Применение оператора к скаляру поля дает:

$$P_0 \phi = -\frac{\hbar}{2\pi i c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{e}{c} A_0 \phi. \quad (190)$$

Точно так же и операторы p_1 , p_2 , p_3 должны быть заменены следующими:

$$P_1 = p_1 + \frac{e}{c} A_1 = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c} A_1 \quad (191)$$

и т. д., причем A_1 , A_2 , A_3 — слагающие известного из классической теории электричества вектор-потенциала. Напряжения электрического и магнитного полей, как известно, вычисляются из электростатического потенциала и вектор-потенциала по формулам:

$$E_x = -\frac{\partial A_0}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial A_0}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial A_0}{\partial z}; \quad (192)$$

$$H_x = \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}; \quad H_y = \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}; \quad H_z = \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}.$$

Обобщение волнового уравнения на случай электромагнитного поля, как одновременно показали Шредингер¹, Гордон² и другие последователи, получается в форме:

$$[-P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + m^2 c^2] \phi = 0, \quad (193)$$

где операторы имеют приведенные выше значения.

¹ E. Schrödinger, «Ann. d. Phys.», 81, 109, 1926 (также «Abhandlungen zur Wellenmechanik»).

² W. Gordon, «Zs. f. Phys.», 40, 117, 1926.

Глава двадцатая

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОНА ПО ДИРАКУ

Аналогия между световыми волнами и волнами материи заставляет предположить, что кроме уравнения Шредингера и Гордона—уравнения квадратного относительно операторов—должно существовать еще некое *первичное* уравнение, *линейное* относительно операторов; из него нужно получить затем уравнение Шредингера. Ведь, и дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее волнообразное распространение света, можно свести к уравнениям первого порядка, именно, к известным маковвелловским уравнениям электромагнитного поля¹. Действительно, Дираку² в 1928 г. удалось найти *дифференциальные уравнения первого порядка*, которые правильно описывают поведение электрона в *электромагнитном поле*, удовлетворяют *постулату относительности*, приводят к уравнению Шредингера, как к *специальному приближенному случаю*, и кроме всего этого дают *собственное вращение электрона*, не делая это явление предметом особой гипотезы.

Дирак получил свои новые уравнения, задав для некоторого линейного оператора форму:

$$f \equiv -i(\gamma_1 P_1 + \gamma_2 P_2 + \gamma_3 P_3 + \gamma_4 P_4) + mc, \quad (194)$$

где P_4 написано вместо iP_0 , и постулируя, что *произведение* из этого оператора и другого, отличающегося от первого лишь тем, что отсутствует минус в правой части, дает оператор уравнения Шредингера-Гордона (уравнение (193)).

¹ Ср. по этому поводу статью E. Guth, Anzeiger der Wiener Akad. d. Wiss. math.-nat. Klasse, 1928, S. 87.

² P. A. M. Dirac, «Proc. Roy. Soc. London», (A), 117, 610, 1927; 118, 351, 1928.

Таким образом должно быть:

$$\left. \begin{aligned} & [-i(\gamma_1 P_1 + \gamma_2 P_2 + \gamma_3 P_3 + \gamma_4 P_4) + mc] \times \\ & \times [i(\gamma_1 P_1 + \gamma_2 P_2 + \gamma_3 P_3 + \gamma_4 P_4) + mc] = \\ & = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 + m^2 c^2. \end{aligned} \right\} \quad (195)$$

Первичное уравнение должно иметь вид:

$$f\psi \equiv [-i(\gamma_1 P_1 + \gamma_2 P_2 + \gamma_3 P_3 + \gamma_4 P_4) + mc] \psi = 0, \quad (196)$$

где значения $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ нужно определить из уравнения (195). Уравнение (195) приводит к следующим соотношениям:

$$\gamma_\mu^2 = 1, \quad \gamma_\mu \gamma_\rho = -\gamma_\rho \gamma_\mu \quad (\mu \neq \rho), \quad (197)$$

если μ и ρ представляют произвольную пару из ряда значков 1, 2, 3, 4. Ясно, что этим частично некоммутативным соотношениям могут удовлетворять не обыкновенные числа, *матрицы*. Действительно, Дирак путем проб нашел, что условия уравнения (107) можно удовлетворить *четырьмя квадратными матрицами, с четырьмя горизонтальными и четырьмя колоннами*.

Эти матрицы таковы:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (198)$$

На основании правил умножения матриц легко убедиться, что значения уравнений (198) удовлетворяют условиям уравне-

ния (197)¹. Всего следует различать 64 элемента матриц, для которых мы будем пользоваться символом $\gamma_{\mu}^{\nu\sigma}$. Каждый из трех значков может принимать значения 1, 2, 3, 4; значок ν пусть служит для обозначения горизонтали, значок σ для обозначения колонны. Таким образом, например, $\gamma_2^{14} = -1$.

Если в уравнении (196) величины γ представляют четырехрядные матрицы, то, очевидно, величина ψ не может сохранить значение простого скаляра. На место одной единственной волновой функции выступают, как нашел Дирак, *четыре волновых функции* $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$. При этом умножение ψ на γ определяется уравнением:

$$\gamma_{\mu}\psi_{\nu} = \sum_{\sigma} \gamma_{\mu}^{\nu\sigma}\psi_{\sigma}. \quad (199)$$

Мы имеем, например,

$$\gamma_2\psi_3 + \gamma_2^{31}\psi_1 + \gamma_2^{32}\psi_2 + \gamma_2^{33}\psi_3 + \gamma_2^{34}\psi_4$$

или, так как по уравнению (198) из четырех элементов третьей горизонтали второй матрицы лишь второй отличен от нуля и равен единице, то

$$\gamma_2\psi_3 = \psi_1.$$

Подставляя в уравнение (196) значения γ из уравнения (198), пользуясь правилами умножения, выраженными уравнением (199), заменяя далее P_4 через iP_0 и замечая, наконец, что можно изменять порядок γ и P , так как матрицы γ не содержат операторов P , мы вместе с Дираком получим следующие четыре совместные уравнения²:

$$\left. \begin{aligned} (P_0 + mc)\psi_1 + (P_1 - iP_2)\psi_4 + P_3\psi_3 &= 0, \\ (P_0 + mc)\psi_2 + (P_1 + iP_2)\psi_3 - P_3\psi_4 &= 0, \\ (P_0 - mc)\psi_3 + (P_1 - iP_2)\psi_2 + P_3\psi_1 &= 0, \\ (P_0 - mc)\psi_4 + (P_1 + iP_2)\psi_1 - P_3\psi_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (200)$$

¹ Заметим, между прочим, что уравнение (197) удовлетворяют не только четыре матрицы γ_{μ} уравнения (198), но и все матрицы формы

$$\gamma'_{\mu} = \Lambda^{-1}\gamma_{\mu}\Lambda,$$

где Λ — произвольная четырехмерная матрица и Λ^{-1} ей обратная.

² Ср. С. G. Darwīl, «Proc. Roy. Soc. London», (A), 118, 654, 1928, уравнение (22).

Прежде всего можно показать, что эта система четырех уравнений в первом приближении сводится к шредингеровскому уравнению дисперсии, а именно если пренебречь ϕ_1 и ϕ_2 сравнительно с ϕ_3 и ϕ_4 и не принимать во внимание влияния магнитного поля и релятивистского изменения массы. Отбрасывая члены ϕ_1 и ϕ_2 , мы получим вместо третьего уравнения:

$$-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial \phi_3}{\partial t} + \left(\frac{e}{c} A_3 - mc \right) \phi_3 = 0. \quad (201)$$

Как показывает четвертое из уравнений (200), уравнение (201) справедливо приближенно и для ϕ_4 ; но, кроме того, как можно вывести из уравнения (200), оно удовлетворяется и ϕ_1 и ϕ_2 . Пользуясь уравнением (201), мы находим:

$$P_0 \phi_1 = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{e}{c} A_0 \phi_1 = mc \phi_1. \quad (202)$$

Поэтому получается

$$(P_0 + mc) \phi_1 = 2mc \phi_1 \quad (203)$$

и аналогичное соотношение для ϕ_2 .

Из первого и второго уравнения (200) мы получаем, таким образом (пренебрегая вектор-потенциалом):

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= -\frac{\hbar}{4\pi i mc} \left[\frac{\partial \phi_4}{\partial x} - i \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right], \\ \phi_2 &= -\frac{\hbar}{4\pi i mc} \left[\frac{\partial \phi_3}{\partial x} + i \frac{\partial \phi_1}{\partial y} - \frac{\partial \phi_4}{\partial z} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (204)$$

Подставляя эти выражения в третье из уравнений (200), мы получим после простых промежуточных вычислений:

$$\Delta \phi_3 = \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} (-mc^2 + eA_0) \phi_3 - \frac{4\pi i m}{\hbar} \frac{\partial \phi_3}{\partial t} = 0. \quad (205)$$

Это уравнение действительно совпадает с обобщенным уравнением Шредингера (уравнение (152)); только вследствие пользования теорией относительности потенциальная энергия ока-

зывается дополненной величиной собственной энергии (mc^2). Таким образом основное уравнение Шредингера получается в качестве первого приближения из уравнения Дирака. Оно удовлетворяется независимо друг от друга функциями ψ_3 и ψ_4 .

Для получения второго приближения нужно принять во внимание и влияние магнитного поля. Для этого по Дарвину¹, которому принадлежит и предыдущий вывод, нужно поступать так²: мы умножаем первое из уравнений (200) на оператор $(-P_3)$, второе на оператор $(-P_1 + iP_2)$, третье на $(mc + P_0)$ и складываем. Тогда получается следующее уравнение:

$$\left. \begin{aligned} & [-P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + m^2c^2] \psi_3 + \\ & + \frac{e}{c} \frac{\hbar}{2\pi} (H_1\psi_4 - iH_2\psi_4 + H_3\psi_3) + \\ & + \frac{e}{c} \frac{\hbar}{2\pi} i(E_1\psi_2 - iE_2\psi_2 + E_3\psi_1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (206)$$

Подобные же уравнения получатся и для других функций ψ .

Уже беглое рассмотрение этого уравнения показывает, что теория электрона Дирака в электромагнитном поле дает прежнее уравнение Шредингера-Гордона (уравнение 193), но с дополнительными членами; а из этих последних, как можно видеть даже без точных вычислений, вытекает, что электрон в магнитном поле ведет себя как маленький магнетик, что находится в согласии с разобранный выше гипотезой Уленбека и Гаудемита; таким образом собственное вращение электрона является необходимым следствием уравнений Дирака. Следует еще отметить, что теория Дирака (ср. уравнение (206) дает еще мнимый электрический момент³. Вопрос о том, можно ли

¹ См. цитированную выше работу.

² Конечно, нужно помнить, что умножение операторов не коммутативно. Например, P_0P_1 вовсе не равно P_1P_0 , а действует соотношением

$$P_0P_1 - P_1P_0 = \frac{e}{c} \frac{\hbar}{2\pi} E_1$$

и аналогично

$$P_1P_2 - P_2P_1 = \frac{e}{c} \frac{\hbar}{2\pi} H_3$$

и т. д.

³ Этот момент по величине равен магнитному; оба равны $\frac{e\hbar}{4\pi mc}$.

этому последнему приписать физическое значение, остается пока открытым.

Наконец, большим успехом теории Дирака следует признать то, что на основе ее Дарвин¹ и Гордон² строго вывели формулы, полученные в 1916 г. совершенно иным путем Зоммерфельдом для объяснения точной *структуры спектра водорода*; прежде удавалось получить эти формулы на почве гипотезы Уленбека и Гаудсмита лишь в первом приближении.

Мы должны в заключение подчеркнуть, что уравнения Дирака (в противоположность уравнению Шредингера) применимы лишь к *первичным частицам материи, т. е. к электронам и протонам*, но не к составным частицам, вроде α -частицы (ср. гл. XVI), которая не обладает результирующим вращением.

¹ См. цитир. выше статью.

² W. Gordon, «Zs. f. Phys.», 48, 11, 1928.

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА И ФИЛОСОФИЯ ПРИРОДЫ

Тот переворот, который произошел в физике благодаря волновой и квантовой механике, слишком глубок и раньше или позже должен оказать сильное влияние на всю философию природы. Новые физические теории открывают возможность существенной переработки многих из самых основных понятий философии; сюда прежде всего относятся понятия *материи, причинности и закона природы.*

Благодаря современной экспериментальной физике в конце XIX в. предположение древних философских систем об *атомистическом строении материи* сделалось вполне достоверным. Но новейшее развитие физики наложило на *самостоятельность* первичных частиц существенные *ограничения*. В настоящее время ни точная *локализация*, ни ясное *ограничение* частиц не представляется возможным. Каждая частица действует на другие и в свою очередь (как показывает статистика Ферми) *ограничена в своей свободе* другими частицами.

Противоположность *материи и света* (в широком смысле слова) новейшим развитием атомной теории очень смягчена. Существенные отличительные свойства материи, прежде всего *прерывность* и наличие *количества движения*, присущи *свету*, и, наоборот, *волновые* свойства света имеют место и у материи. *Корпускулярные* и *волновые* представления в современной физике не являются больше основой рассмотрения совершенно различных отраслей физической науки; наоборот, они представляют *дополнительные черты* совершенно общего и единого познания природы ¹.

Вместо резко выраженной *причинности*, проявляющейся в явлениях макроскопического мира, новейшая физика выдвинула *неопределенность* атомных процессов; *детерминированность* имеет место лишь для *статистических* величин, которые со-

¹ Ср. Н. Bohr, «Naturwiss.», 16, 245, 1928; «Nature», 121, 580, 1928.

поставляются *индивидуальным, элементарным* процессам физики. Эта точка зрения открывает, конечно, новые перспективы для определения *физической закономерности*, как таковой¹. В центр интересов философии все более и более выдвигается вопрос о том, существуют ли в природе вообще какие бы то ни было закономерности кроме чисто *статистических*; благодаря их общности физике пришлось бы делить их с другими науками, как, например, с политической экономией.

Взгляд назад на историю теоретической физики показывает, что сущность физического прогресса заключается в постепенном освобождении физики от чисто человеческих точек зрения. В этом смысле годы, когда появились работы де-Бройля, Шредингера, Гейзенберга и Дирака, следует считать периодом прояснения, который дал физике очень много для преодоления привычных предрассудков.

¹ Ср., с одной стороны, P. Jordan, Причинность и статистика в современной физике, «Naturwiss.», 15, 205, 1927 (также «Nature», 119, 566, 1927) и, с другой, M. P. L. a. n. s. k., Физический закон в свете новейшего исследования, «Naturwiss.», 14, 249, 1926.

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ

Глава I. В качестве введения разбирается разница механического и физического мышления, идеи механики, теории относительности, представление о квантах света, уровни энергии в атоме и принцип квантования Бора. В качестве основных затруднений теории Бора указаны противоречия применения законов классической механики с выделением дискретных орбит, а также определение механических процессов по существу оптической постоянной h .

Глава II. Оптический принцип Ферма оказывается родственным механическому принципу Мопертюи. Аналогия оправдывает предположение, что механические движения основаны на каких-то волновых процессах; при этом соблюдается универсальная пропорциональность между механической скоростью и обратной величиной волновой скорости. Общая волновая формула обнаруживает связь с преобразованием Лорентца. Колебательный процесс, связанный с частицей, представляет волну со скоростью, большей скорости света; групповая скорость волны равна механической скорости частиц.

Глава III. Де-Бройль каждой частице материи сопоставляет колебательный процесс при помощи соотношения

$$mc^2 = h\nu,$$

причем механические закономерности оказываются следствием общего волнового принципа. Электроны и протоны являются центрами энергии, так называемых волн материи, длина волны которых равна частному от деления элементарного кванта действия на количество движения частицы. Обсуждаются некоторые следствия теории де-Бройля (квантование замкнутых орбит, квантование энергии поступательного движения молекул газа, заключенного в некотором сосуде).

Глава IV. Из представления, что частицы материи являются центром энергии волн, энергия которых состоит из элементов $h\nu$, выводятся некоторые формулы теории относительности.

Глава V. Вытекающая из теории де-Бройля необходимость существования дифракции волн материи находит себе экспериментальное подтверждение в ряде опытов с дифракцией электронов при отражении от кристаллов (Дэвиссон и Джермер) и при прохождении катодных лучей через металлические фольги (Томсон, Руш и др.).

Глава VI. В связи с идеями де-Бройля Шредингер дал обобщение механики, соответствующее переходу от принципа Ферма к принципу Гюйгенса, т. е. от геометрической к волновой оптике. Применение к одной частице дает основное уравнение

$$\Delta S + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) S = 0,$$

где S — так называемый скаляр поля, E — полная, V — потенциальная энергия. Физическая задача квантования сводится к математической задаче о разыскании характеристических чисел дифференциального уравнения.

Глава VII. В качестве примеров для механики характеристических чисел рассмотрены линейный гармонический осциллятор и ротатор со свободной осью. Получаются результаты, отличные от того, что давала старая квантовая теория. Далее, рассмотрена задача об атоме водорода, эффекте Шпарка и др.

Глава VIII. Квантовая механика Гейзенберга в противоположность прежней квантовой теории заключает лишь соотношения между величинами, доступными наблюдению; таковыми являются частоты и интенсивности спектральных линий, а также уровни энергии атомов, которые можно установить опытами с электронным ударом. Всякая периодически изменяющаяся координата электрона заменяется квадратной схемой частных колебаний, частоты которых равны частотам спектральных линий, а амплитуды определяют наблюдаемые интенсивности. Для таких схем даны правила вычислений, в частности умножение неком-

мутативно. Устанавливается так называемое «перестановительное соотношение», применение которого к гармоническому линейному осциллятору приводит к тем же результатам, что и волновая механика. Автоматически выполняется боровское условие частот.

Глава IX. Теория Гейзенберга разработана Борном и Иорданом при помощи теории матриц. Перестановительное соотношение Гейзенберга дает в качестве необходимых общих следствий закон сохранения энергии и условие частот.

Глава X. Применением понятия математического оператора доказывалась эквивалентность теорий Шредингера и Гейзенберга. Распространение правила Гейзенберга на операторы приводит к уравнению Шредингера, как обобщению классической механики.

Глава XI. В противоположность Шредингеру, рассматривающему электрон как пакет энергии, Борн с точки зрения квантовой механики рассматривает скаляр поля, распространяющийся волнообразно, как вероятность электрону находиться в данном месте. По квантовой механике лишь для статистических вероятностей справедлив закон причинности, для элементарных процессов он не имеет места. Эта точка зрения подтверждается «принципом неопределенности» Гейзенберга, согласно которому всякое измерение атомных величин неизбежно связано с неточностью.

Глава XII. Атомная механика, в связи с представлением о вращающемся электроны, различает четыре квантовых числа, определяющих состояние электрона. Принцип Паули, согласно которому два электрона не могут иметь одинаковых значений всех четырех квантовых чисел, определяет максимальные числа заполнения электронных групп и является основой квантовой теории периодической системы элементов.

Глава XIII. Закон излучения Планка, как показал Бозе, можно вывести из представления о газе, состоящем из световых квантов; при этом статистику нужно перестроить так, что в известном смысле на место частиц, заполняющих ячейки фа-

зового пространства, становятся ячейки, заполненные определенным числом частиц. Пользуясь статистикой Бозе, Эйнштейн дал отличную от прежней теорию вырождения газов при низких температурах.

Глава XIV. Ферми применил принцип Паули в области статистики и создал новую теорию газов. Статистика Ферми приводит к существованию энергии и давления абсолютного нуля и к другим выводам. Особенно плодотворным оказалось применение статистики Ферми к теории металлической проводимости (Зоммерфельд).

Глава XV. В несколько измененной форме уравнение Шредингера позволяет решать задачи о взаимодействии световых волн и атомов (дисперсия, эффект Рамана, фотоэффект, эффект Оже и эффект Комптона). То же уравнение решает задачу о действии волн материи на атомы, т. е. вопрос рассеяния электронов и др.

Глава XVI. Теория квантового резонанса Гейзенберга объясняет распадение системы термов в атомах со многими электронами на частичные системы, между которыми могут возникать лишь слабые комбинационные линии вследствие собственного вращения электрона. Та же теория объясняет ряд особенностей молекулярных спектров. На почве представления о квантовом резонансе Гейтлер и Лондон построили теорию химических сил, в частности дали объяснение гомеоплярных связей и переменных валентностей.

Глава XVII. Соображения квантовой механики приводят к выводу, что для молекул, состоящих из двух одинаковых атомов, возможны две различные модификации, переходы между которыми почти невозможны; так называемой парамодификации соответствуют четные квантовые числа и симметрические функции, ортомодификации — нечетные квантовые числа и антисимметрические функции. Различным модификациям соответствует неодинаковый температурный ход теплоемкости. Обычный водород представляет смесь обеих модификаций в отношении 3 : 1. Это соотношение концентраций соответствует равновесию лишь при высоких температурах. При переходе к низким температу-

рам равновесие смещается в сторону пароводорода. Получение почти чистого пароводорода при температуре жидкого водорода удалось Бенгеферу благодаря применению катализаторов.

Глава XVIII. Квантовая теория атомных ядер построена на предположении, что ядро окружено «барьером», где потенциальная энергия больше, чем энергия составных частей ядра. В противоположность классической механике по волновой механике переход через эту область для частиц ядра возможен, хотя и мало вероятен. Теория радиоактивности построена на этой основе Гамовым, а также Гернеем и Кондоном.

Глава XIX. Применением теории относительности Шредингер и Гордон распространили волновое уравнение на случай электрона в электромагнитном поле.

Глава XX. Дирак получил дифференциальные уравнения первого порядка, описывающие с точки зрения волновой механики поведение электрона в электромагнитном поле. Они удовлетворяют теории относительности, дают в первом приближении уравнение Шредингера и собственное вращение электрона.

Глава XXI. Новейшее развитие физики атома приводит к существенным изменениям в понятиях материи, причинности и закона природы.

НАИБОЛЕЕ УПОТРЕБИТЕЛЬНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

<i>A</i> — амплитуда.	<i>g</i> — групповая скорость.
<i>D</i> — диагональная матрица.	<i>h</i> — элементарный квант действия.
<i>E</i> — энергия (или напряжение электрического поля).	<i>i</i> — мнимое или мнимая единица.
<i>F</i> — напряженное поле.	<i>k</i> — постоянная Больцмана.
<i>G</i> — количество движения.	<i>j, k, l, m, n</i> — квантовые числа.
<i>H</i> — гамильтонова функция (или полином Эрмита или магнитное поле).	<i>m</i> — масса.
<i>L</i> — кинетическая энергия.	<i>p</i> — импульс.
<i>N</i> — число частиц.	<i>q</i> — координата.
<i>P</i> — сила (в гл. XVIII оператор).	<i>t</i> — время.
<i>R</i> — газовая постоянная.	<i>v</i> — полная скорость (или угловая скорость вращения).
<i>S</i> — скаляр Шредингера (или втройня).	<i>v</i> — механическая скорость.
<i>T</i> — абсолютная температура (или спектральный терм).	<i>w</i> — в гл. IV универсальная скорость.
<i>U</i> — момент количества движения.	<i>A</i> — лапласов оператор.
<i>V</i> — потенциальная энергия (или объем).	<i>B</i> — сокращение, определяемое уравнением (8).
<i>W</i> — вероятность.	<i>e</i> — фазовая постоянная или энергия отдельного элемента.
<i>a</i> — комплексная амплитуда.	<i>\eta</i> — плотность излучения.
<i>b</i> — ускорение.	λ — длина волны.
<i>c</i> — скорость света.	μ — масса.
<i>e</i> — элементарный заряд (или основное логарифмов).	ν — частота.
	φ — фаза.
	Φ — скаляр поля.

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПОСТОЯННЫЕ

Элементарный квант действия (<i>h</i>)	$6,545 \cdot 10^{-27}$ эрг. сек.
Заряд электрона (<i>e</i>)	$4,774 \cdot 10^{-10}$ эл. ст. эк.
Скорость света (<i>c</i>)	$2,9980 \cdot 10^{10}$ см/сек
Масса протона	$1,661 \cdot 10^{-24}$ г
Масса электрона	$9,000 \cdot 10^{-28}$ г
Постоянная Больцмана (<i>k</i>)	$1,372 \cdot 10^{-16}$ эрг. град.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- | | | |
|--|---|---|
| <p>Астон 123
 Вак 110, 123
 Бардж 137
 Бозе 95
 Больцман 93
 Бонгефер 135
 Бор 11, 91, 154
 Бори 79, 83, 114
 Бройль 23
 Ванг 120
 Вентцель 110, 112, 114
 Вильсоп 88
 Вии 94
 Вияер 79
 Гааз 10, 42
 Гамов 138
 Гартек 134
 Гаудсмит 88
 Гейгер 143
 Гейвельберг 55, 84, 117,
 123, 127
 Гейтлер 118
 Гернайт 138
 Герц 12
 Гиллер 135
 Гордон 113, 153
 Гюйгенс 7
 Гюнгер 38
 Дарвин 150</p> | <p>Дебай 113
 Даниссон 126, 128
 Джермер 38
 Джинс 26, 29
 Джонстон 136
 Дирак 81, 148
 Дэвиссон 38
 Жюко 136
 Зомерфельд 88, 105
 Иордан 89, 115
 Кикучи 40
 Кинг 137
 Клувиус 135
 Коль 4
 Комптон 10, 113
 Кондон 138
 Крэммер 109
 Купоман 38
 Ладенбург 109
 Лайман 134
 Лондон 118, 121,
 123
 Лоренц 17
 Максвелл 7
 Мейер 87
 Менделеев 87
 Мозолей 87
 Мопертюи 15
 Муавр 56</p> | <p>Нерист 37
 Неттал 143
 Ньютон 8
 Оже 112
 Паули 88
 Пельтье 106
 Планк 9, 30
 Поит 79
 Рамап 110
 Рамзауер 38
 Рупп 40
 Рэлей 21
 Сугнура 120
 Стонер 91
 Томсон 39
 Улонбек 88
 Ферма 14
 Ферми 101
 Франк 12
 Фюс 112
 Шерер 39
 Шредингер 43, 52, 77,
 82, 107, 147
 Штарк 58
 Эйкен 124, 133
 Эйштейн 11, 26, 37
 Экарт 80
 Эльвассер 37
 Эрмит 45</p> |
|--|---|---|

АЛФАВИТНО-ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютная энтропия газа 105
 «Арифметика» период. системы 91
 Атом водорода 11, 51, 118
 Атом гелия 120
 Атомистическая структура электричества 9

 благородные газы 90
 Боровское правило квантования 11, 76
 — условие частот 75

 Валентность 121
 Вероятность пребывания кванта света
 в данном месте 84
 — спонтанного перехода 109
 Взаимодействие двух нейтральных
 атомов водорода 118
 — между атомами и составными
 волнами 107
 Возмущение движения электрода под
 действием внешнего электрического
 поля 52, 53
 Волновая механика 23
 — скорость 14 и сл.
 Волновое число 29
 Волновой процесс 16
 Волны материи 23
 Вращение электрона 88
 Вторичное излучение 108
 Второе квантовое число 88
 Вырождение газов 110 и сл.
 Выход фотоэлектронов 111

 Гамма-функция 73
 Гамма-лучи 85
 Гетерополярные связи 119
 Гиббса термодинамический потен-
 циал 104
 Гиперболические орбиты 52, 110

 Главное квантовое число 88
 Гомеополлярные связи 119 и сл.
 Группа волн 20
 — характеристических чисел 58
 Групповая скорость 20, 21
 Группы электронов 90

 Давление абсолютного нуля 104
 Деление на матрицу 71
 Диагональная единичная схема 61
 — матрица 68
 Дискретные эллиптические орбиты 52,
 110
 Дисперсия 107 и сл.
 Дифракционные круги в опытах Том-
 сона 89
 — явления волн материи 87
 — — при столкновении свободных
 электронов с атомами 38
 Длина волны электрона 24
 Добавочный электрический момент 109

 Единичная матрица 70
 Задача трех атомов 123
 Закон Видеман-Франа 106
 — преломления (по принципу
 Ферма) 14
 — Рэлея-Джинса 29

 Измерение атомных величин связано
 с неточностью 85
 Изотопы 123, 137
 Импульс 24
 Инертная масса энергии 26
 Интенсивность спектральной линии 58
 Интерпретация Борпа волн мате-
 рии 83
 Ионизация электронным ударом 115
 Исчисление матриц 68

- Каноническая форма уравнений движения 73
 Квадратная схема 58
 Квантование энергии поступательного движения 26
 Квантовая механика 55
 Квантовое условие 12
 Квантовые переходы возможны лишь между соседними состояниями осциллятора 67
 Кванты света 10
 Колебательный процесс, связанный с движущимся телом 18
 Комбинационные частоты 109
 Комплексная амплитуда 57, 71
 Контактные потенциалы 106
 Координатная матрица 73
 Коэффициент поглощения света 111
 q -числа 81
- Лапласов оператор 41, 42
- Материя и свет 154
 Матрица 68
 Метод характеристических чисел Шредингера 80, 81
 Механика чисел q (Лирак) 81
 Механическое направление в физике 7
 Мнимый электрический момент 152
 Многоэлектронная задача 54
 Молекулярные спектры 117
- Наблюдаемые на опыте величины 55
 Некогерентное рассеяние 115
 Непарные электроны 121
- Обобщенное уравнение Шредингера 54, 80
 Оператор 77
 Опыты Дэвиссона и Кунсмана 38
 — Дэвиссона и Джермера 38, 39
 — Рамазура 38
 — Руппа 40
 — Томсона Г. П. 39
- Ортоводород 128 и сл.
 Ортогональ 116
 Ортомодификация 126
 Основное уравнение в теории дисперсии 108
 Осциллятор 47
 — гармонический 47
 — линейный 47
 Открытие Коля 40
 Отражение медленных электронов от металлических поверхностей 38
- «Пакет волн» 82
 Параводород 128 сл.
 Парагоны 116
 Парамодификация 126
 Парные электроны 121
 Перестановительные соотношения Гейзенберга 85
 Периодическая система элементов 87
 Периодическое движение по замкнутой орбите 24
 Плотность электрических зарядов 108
 Побочное квантовое число 88
 Подгруппы 90
 Покоящаяся масса 35
 Полином Эрмита 45
 Половинные квантовые числа 51, 89
 Полосатые спектры 51
 Порядковый номер элемента 87
 Постоянная Больцмана 93
 — радиоактивного распада 141 и сл.
 Потенциальный барьер 139
 Правило квантования 26
 — перестановки Гейзенберга 63
 Преобразование Доренца 17
 Принцип Гюйгенса 41
 — кратчайшего времени пробега света (Ферма) 14 и сл.
 — неопределенности Гейзенберга 85
 Принцип Паули 89
 — Ферма 14, 15
 — четверного квантования атомных состояний 88
 Произведение двух операторов 77
 Пространственная точечная решетка 28

- «Пространство импульсов» 30
 — конфигураций 54
 Протоны 8, 9
 Прямолинейное распространение света 41
- Расщепление значений энергии 53
 — спектральных линий в электрическом поле 53
 Резонанс 110
 — квантовый 117, 118
 Резонансные биения 118
 Релятивистское волновое уравнение 146
 Ротатор со свободной осью 49
- «Сверхкомплексные числа» 81
 «Свет» 9
 Световые кванты 10, 92
 Связанных колебаний взаимодействие 116
 Слоистое строение в распределении энергии молекул 102
 Собственные колебания в замкнутой системе 26
 Соотношение Гейгер-Неталла 143
 Соударение частиц материи 114
 Спектральное разложение 93
 Спектральные термы 74
 Спектроскопическое исследование в применении к теории строения атома 11, 12
 «Spin» 88
 Средняя плотность электрических зарядов 54
 Статистика Бозе 96
 Статистическая вероятность данного распределения 94 и сл.
 — физика 92
 Структура ядер 118, 123
 Сумма и разность квадратных схем 60
- Теорема Мопертюи 15
 — Фурье 55
 Теория газов Эйнштейна 100
- Теория Дирака (электронов в электромагнитном поле) 148 и сл.
 — квантов 8
 — относительности 8, 17, 145
 — связь с волновой механикой 32 и сл.
 — Ферми 100 и сл.
 — химических сил Гейтлера и Лондона 118
 Тождественность масс и энергии 8
 Тонкая структура спектра водорода 153
- Удельная плотность излучения 93
 — теплота газа в случае сильного вырождения (Ферми) 104
 Угловые плоскости 27
 Умножение квадратных схем 60
 Универсальная постоянная 9
 Уравнения Дирака 148 и сл.
 — состояния газа в случае сильного перерождения 104
 — Шредингера 43
 Уровни энергии 12
- Фаза колебания 16
 Фазовая постоянная 16
 Формула Вина 94
 — изменения энергии в электрическом поле 58
 — Муавра 56
 — Плана 93
- Фотоны 10
 Фотоэлектрический эффект 10
 Фотоэлектрон 110
 Фотоэлектрона выход 111
 — кинетическая энергия 111
 Фундаментальная функция 44
 — симметрическая и антисимметрическая 125
- Характеристические числа 110
 — атома водорода 110
 — дифференциального уравнения 43
 Химическая периодичность 87
 Химические связи 118

- Центр энергии групповых волн 20
 Частицы материи—места наибольшей плотности энергии в волнах 82
 Чередование интенсивности в полосатых спектрах 117
 Шаровые функции 46
 Шарообразная волна материи 112
 Эквивалентность волновой теории Шредингера и квантовой механики Гейзенберга 77 и сл.
 Эквивалентные электроны 89
 Электрон в магнитном поле—маленький магнетик 152
 — отдачи 113
 Электронная теория металлов 105
 Электронный газ 105
 — удар 114
 Электроны 8, 9, 121
 Элементарный квант действия 9, 10, 76
 Энергия абсолютного нуля 49
 — взаимодействия двух атомов водорода, находящихся в основном состоянии 118
 — взаимодействия двух нейтральных атомов гелия 120
 — диссоциации молекулы водорода 120
 Энергия линейного гармонического осциллятора, по теории Шредингера 49
 — молекулы 101 и сл.
 — осциллятора (по Гейзенбергу) 65
 Эффект Доплера 85
 — Комптона 85, 113 и сл.
 — Пельтье 106
 — Рамана 110
 — Штарка 53
 Явление Оже 112
-

Другие книги нашего издательства:



URSS

Серия «Синергетика: от прошлого к будущему»

Петроуз Р. **НОВЫЙ УМ КОРОЛЯ.** О компьютерах, мышлении и законах физики. Пер. с англ.

Майнцер К. **Сложносистемное мышление: Материя, разум, человечество. Новый синтез.** Пер. с англ.

Климонтювич Ю. Л. **Турбулентное движение и структура хаоса.**

Анищенко В. С. **Сложные колебания в простых системах.**

Анищенко В. С. **Знакомство с нелинейной динамикой.**

Трубецков Д. И. **Введение в синергетику.** В 2 кн.: Колебания и волны; Хаос и структуры.

Арнольд В. И. **Теория катастроф.**

Хакен Г. **Информация и самоорганизация.** Пер. с англ.

Малинецкий Г. Г. **Математические основы синергетики.**

Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. **Нелинейная динамика и хаос: основные понятия.**

Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., Подлазов А. В. **Нелинейная динамика.**

Малинецкий Г. Г. (ред.) **Будущее России в зеркале синергетики.**

Малинецкий Г. Г. (ред.) **Синергетика: Исследования и технологии.**

Безручко Б. И. и др. **Путь в синергетику. Эссекурс в десяти лекциях.**

Данилов Ю. А. **Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение.**

Князева Е. П., Курдюмов С. И. **Основания синергетики.** Кн. 1, 2.

Редько В. Г. **Эволюция, нейронные сети, интеллект.**

Тюкин И. Ю., Терехов В. А. **Адаптация в нелинейных динамических системах.**

Васильков Г. В. **Эволюционная теория жизненного цикла механических систем.**

Чернавский Д. С. **Синергетика и информация (динамическая теория информации).**

Баранцев Р. Г. **Синергетика в современном естествознании.**

Баранцев Р. Г. и др. **Асимптотическая математика и синергетика.**

Пригожин И. **Неравновесная статистическая механика.**

Пригожин И. **От существующего к возникающему.**

Пригожин И., Стенгерс И. **Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени.**

Пригожин И., Стенгерс И. **Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой.**

Пригожин И., Николис Г. **Познание сложного. Введение.**

Пригожин И., Гленсдорф П. **Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций.**

Сыздалев И. П. **Нанотехнология: физико-химия нанокластеров, наноструктур и наноматериалов.**

Тел./факс:

(499) 135-42-46,

(499) 135-42-16,

E-mail:

URSS@URSS.ru

<http://URSS.ru>

Наши книги можно приобрести в магазинах:

«Библио-Глобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6. Тел. (493) 625-2457)

«Московский дом книги» (м. Арбатская, ул. Новый Арбат, 8. Тел. (495) 203-8242)

«Молодая гвардия» (м. Полянка, ул. Б. Полянка, 28. Тел. (495) 238-5001, 780-2370)

«Дом научно-технической книги» (Ленинский пр.-т, 40. Тел. (495) 137-6019)

«Дом книги на Ладостской» (м. Бауманская, ул. Ладостская, 8, стр. 1. Тел. 267-4302)

«Гюизис» (м. Университет, 1 гуп. корпус МГУ, комн. 141. Тел. (495) 939-4713)

«У Кентавра» (РГГУ) (м. Новослободская, ул. Чапаева, 15. Тел. (499) 973-4301)

«СПб. дом книги» (Невский пр., 28. Тел. (812) 448-2355)

Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Наше издательство специализируется на выпуске научной и учебной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений. Мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.



URSS

Среди выпущенных и готовящихся к изданию книг мы предлагаем Вам следующие:

- Фок В. А. Начала квантовой механики.*
Фок В. А. Работы по квантовой теории поля.
Кемпфер Ф. Основные положения квантовой механики.
Мотт Н., Снеддон И. Волновая механика и ее применения.
Тарасов Л. В. Основы квантовой механики.
Тарасов Л. В. Введение в квантовую оптику.
Тарасов Л. В. Физические основы квантовой электроники: Оптический диапазон.
Тарасов Л. В. Физика лазера.
Галицкий В. М., Кариакоев Б. М., Коган В. И. Задачи по квантовой механике. В 2 кн.
Горбачевич А. К. Квантовая механика в общей теории относительности.
Клиин С. Я. Квантовая оптика: поля и их детектирование.
Вильф Ф. Ж. Логическая структура квантовой механики.
Эддингтон А. Относительность и кванты.
Ван дер Варден Б. Л. Метод теории групп в квантовой механике.
Бауэр Э. Введение в теорию групп и ее приложения к квантовой физике.
Петрашнев М. И., Трифонов Е. Д. Применение теории групп в квантовой механике.
Хамермеш М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам.
Багавантам С., Венкатараюду Т. Теория групп и ее применение к физическим проблемам.
Бриллюэн Л. Квантовая статистика.
Хинчин А. Я. Математические основания квантовой статистики.
Дирак П. А. М. Лекции по квантовой теории поля.
Маслов В. П., Шведов О. Ю. Метод комплексного роста в задаче многих частиц и квантовой теории поля.
Стойновский А. В. Введение в математические принципы квантовой теории поля.
Планк М. Теория теплового излучения.
Планк М. Введение в теоретическую физику. Кн. 1–5: Общая механика; Механика деформируемых тел; Теория электричества и магнетизма; Оптика; Теория теплоты.
Серия «Физико-математическое наследие: физика (квантовая механика)»
Бройль Л. де. Введение в волновую механику.
Фок В. А. Квантовая физика и строение материи.
Гриш Х. Матричная квантовая механика.
Флюгге З. Задачи по квантовой механике. В 2 т.

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:
 тел./факс (499) 135–42–16, 135–42–46
 или электронной почтой URSS@URSS.ru
 Полный каталог изданий представлен
 в интернет-магазине: <http://URSS.ru>

Научная и учебная
литература

(1884–1941)

Австрийский физик-теоретик. Родился в городе Брно (Чехия). В 1906 г. окончил Венский университет. В этом же университете работал с 1912 г. в качестве лектора; с 1923 г. — профессор. В 1913–1914 гг. преподавал в Лейпцигском университете. С 1935 г. жил в США. С 1936 г. — профессор Нотр-дамского университета.



В область научных интересов А. Гааза входили спектроскопия, квантовая теория, структура атома, история физики. В 1910 г. он предложил модель атома, в которой впервые стремился связать квантовый характер излучения со структурой атома (модель Гааза), и получил количественное соотношение между постоянной Планка и радиусом атома. Исходя из своей модели, А. Гааз вычислил постоянную Ридберга и постоянную Планка. В 1920 г. независимо от Ф. Лумиса он дал формулу для изотопного эффекта вращающихся спектров.

Представляем другие книги нашего издательства:



7988 ID 108157

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА



9 785397 012218

Тел./факс: 7 (499) 135-42-1
Тел./факс: 7 (499) 135-42-4

интернет-магазин
OZON.RU



28929472

<http://URSS.ru>

Любые отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные опечатки присылайте по адресу URSS@URSS.ru. Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице этой книги в нашем интернет-магазине <http://URSS.ru>